



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

- + *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
- + *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
- + *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
- + *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter <http://books.google.com> durchsuchen.

PAA
Archiv

NOV 1964

20

1964

Mechanik.

- XXVII. Ueber den Schwerpunkt und dessen nützliche Anwendung in der Stereometrie. Von Herrn Corneille-L. Landré, Privat-Lehrer der Mathematik in Utrecht IV. 361**

Geschichte der Mathematik und Physik.

- XXXI. Zur Charakteristik des Astronomen Friedrich
Theodor Schubert von E. M. Arndt . . IV. 479**

Übungsaufgaben für Schüler.

- XXV. Zwei arithmetische und eine geometrische Aufgabe von Herrn Doctor Christian Fr. Lindman in Strengnäs in Schweden . . . III. 352**

Literarische Berichte *).

CLIII.	I.	1
CLIV.	II.	1
CLV.	III.	1
CLVI.	IV.	1

*) Jede einzelne Nummer der Literarischen Berichte ist für sich besonders paginirt von Seite 1 an.

$$G:D = h(2a-h):\frac{h}{2}(2a-\frac{h}{2}),$$

folglich

$$D = \frac{G}{4} \cdot \frac{4a-h}{2a-h}$$

und

$$I = \frac{Gh}{3} \cdot \frac{3a-h}{2a-h}.$$

Für $h=a$, oder das halbe Ellipsoid, erhält man hieraus *)

$$I = \frac{2Ga}{3},$$

oder wenn man mit b und c die beiden anderen Halbachsen des Ellipsoids bezeichnet, wodurch $G = bc\pi$ wird,

$$I = \frac{2abc\pi}{3}.$$

Die Verdoppelung hiervon giebt das ganze Ellipsoid. Man kann dasselbe aber auch direct haben, wenn man $G=0$, $D=bc\pi$ und $h=2a$ setzt.

Im Paraboloid hat man

$$G:D = h:\frac{h}{2},$$

folglich

$$D = \frac{G}{2}$$

und

$$I = \frac{Gh}{2}.$$

Im Hyperboloid sei $2a$ die gemeinschaftliche Hauptaxe der Achsenschnitte. Dann wird

$$G:D = h(2a+h):\frac{h}{2}(2a+\frac{h}{2}),$$

folglich:

$$D = \frac{G}{4} \cdot \frac{4a+h}{2a+h}$$

und

*) Im halben Ellipsoid ist $D = \frac{3}{4}G$, im Paraboloid (s. unten) $D = \frac{1}{2}G$, im Kegel $D = \frac{1}{4}G$, welche Zusammenstellung auch nicht ohne Interesse sein mag.

$$\begin{aligned}
& k^4 \cdot r^2 + k^3 \cdot \frac{\{a^2 b^2 c^2 + a^2 \alpha^2 (b^2 + c^2) + b^2 \beta^2 (c^2 + a^2) + c^2 \gamma^2 (a^2 + b^2) - (a^2 b^2 + b^2 c^2 + c a^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - r^2)\}}{a^2 b^2 c^2} \\
& + k^2 \cdot \frac{\{(a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2) + (a^2 \alpha^2 + b^2 \beta^2 + c^2 \gamma^2) - (a^2 + b^2 + c^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - r^2)\}}{a^2 b^2 c^2} \\
& + k \cdot \frac{(a^2 + b^2 + c^2) - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - r^2)}{a^2 b^2 c^2} + \frac{1}{a^2 b^2 c^2} = 0
\end{aligned}$$

in Bezug auf die Veränderliche k ist die Gleichung der zum betrachteten Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

parallelen Oberfläche, d. i. die Gleichung der Oberfläche, deren auf den Normalen des Ellipsoids gemessener Abstand von diesem Letzteren unveränderlich und $= r$ ist.

Indem ich darauf zurückkomme, schliesse ich zugleich die von Cayley von andern Grundlagen aus neuestens gegebenen Entwicklungen über denselben Gegenstand an. (Man vergleiche „Annali di Matematica da B. Tortolini“, t. III, p. 311 u. 345.)

2. Die Richtigkeit der ausgesprochenen Sätze zuerst erweisen sich leicht. Denn was den ersten anbelangt, so repräsentirt bekanntlich die Discriminante der Gleichung

$$k[(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - r^2] + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

welche in der oben gegebenen Form erhalten wird, und an den angeführten Orten in der kürzeren Gestalt

$$k^3 \cdot \Delta + k^2 \cdot \Theta + k \cdot \Theta_1 + \Delta_1 = 0$$

geschrieben worden ist, die auch hier beibehalten werden soll, das System der drei Paare von geraden Linien, welche durch die vier Durchschnittspunkte des Kreises

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - r^2 = 0$$

mit dem Kegelschnitt

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

hindurch gehen, oder die Gegenseitenpaare und das Diagonalenpaar des gemeinschaftlichen eingeschriebenen Vierecks.

Wurzeln besitzen und ihre Discriminante nach k muss also Null sein.

Man bildet diese Letztere durch Elimination aus

$$4\Delta k^2 + 3\Theta k^2 + 2\Omega k + \Theta_1 = 0,$$

$$\Theta k^3 + 2\Omega k^2 + 3\Theta_1 k + \Delta_1 = 0$$

entweder in Form der Determinante:

$$\begin{vmatrix} 4\Delta & 3\Theta & 2\Omega & \Theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 4\Delta & 3\Theta & 2\Omega & \Theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 4\Delta & 3\Theta & 2\Omega & \Theta_1 \\ \Theta & 2\Omega & 3\Theta_1 & 4\Delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta & 2\Omega & 3\Theta_1 & 4\Delta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta & 2\Omega & 3\Theta_1 & 4\Delta_1 \end{vmatrix} = 0,$$

oder in der entwickelten Form

$$\begin{aligned} & 256\Delta^3\Delta_1^3 + \Theta^2\Theta_1^2\Omega^2 + 144\Delta\Delta_1^2\Theta^2\Omega + 144\Delta^2\Delta_1\Theta_1^2\Omega \\ & + 36\Delta_1\Theta^3\Theta_1\Omega + 36\Delta\Theta_1^3\Theta\Omega + 16\Delta\Delta_1\Omega^4 \\ & = 4\Theta^3\Theta_1^3 + 4\Delta\Theta_1^2\Omega^3 + 4\Delta_1\Theta^2\Omega^3 + 27\Delta_1^2\Theta^4 + 27\Delta^2\Theta_1^4 + 6\Delta\Delta_1\Theta^2\Theta_1^2 \\ & + 192\Delta^2\Delta_1^2\Theta\Theta_1 + 128\Delta^2\Delta_1^2\Omega^2 + 80\Delta\Delta_1\Theta\Theta_1\Omega^2, \end{aligned}$$

und in der brauchbarern reducirten*)

$$\begin{aligned} & 4\left(4\Delta\Delta_1 - \Theta\Theta_1 + \frac{\Omega^2}{3}\right)^3 \\ & = \frac{1}{27}(72\Delta\Delta_1\Omega + 9\Theta\Theta_1\Omega - 27\Delta\Theta_1^2 - 27\Delta_1\Theta^2 - 2\Omega^3)^2 \end{aligned}$$

*) Man verdankt diese Reduction der Discriminante einer binären Form des vierten Grades den Herren Boole und Cayley. Wenn man sie in der Form

$$\begin{aligned} & \left[\Delta\Delta_1 - 4\frac{\Theta}{4} \cdot \frac{\Theta_1}{4} + 3\left(\frac{\Omega}{6}\right)^2\right]^3 \\ & = 27\left[\Delta\Delta_1\frac{\Omega}{6} + 2\frac{\Theta}{4}\frac{\Theta_1}{4}\frac{\Omega}{6} - \Delta\left(\frac{\Theta_1}{4}\right)^2 - \Delta_1\left(\frac{\Theta}{4}\right)^2 - \left(\frac{\Omega}{6}\right)^3\right]^2 \end{aligned}$$

schreibt, so erkennt man darin die von jenen gegebene Relation der Invarianten der gedachten Form

$$Ax^4 + 4Bx^3y + 6Cx^2y^2 + 4Dxy^3 + Ey^4 = 0,$$

$$(AE - 4BD + 3C^2)^3 = 27(ACE + 2BCD - AD^2 - EB^2 - C^3)^2,$$

oder

$$S^3 = 27T^2.$$

Man erkennt daraus leicht, dass die Gleichung der Parallellfläche in ξ, η, ζ von der zehnten Ordnung ist.

5. Ich beabsichtige augenblicklich nicht, in die Discussion derselben einzugehen, aber ich bemerke, dass dieselbe besonders auf der reducirten Form zu verweilen haben wird. Folgende Ergebnisse aus der Theorie der binären biquadratischen Formen gewinnen für dieselbe entscheidende Bedeutung. Für die Form

$$Ax^4 + 4Bx^3y + 6Cx^2y^2 + 4Dxy^3 + Ey^4 = 0$$

lassen sich beide Invarianten S und T als symmetrische Functionen der Wurzeln ausdrücken; nämlich, wenn die vier aus der Gleichung entspringenden Werthe des Verhältnisses $\frac{x}{y}$ durch $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ bezeichnet werden,

$$S = (\alpha - \beta)^2(\gamma - \delta)^2 + (\beta - \gamma)^2(\delta - \alpha)^2 + (\gamma - \delta)^2(\alpha - \beta)^2,$$

$$T = (\alpha - \beta)^2(\gamma - \delta)^2(\alpha - \gamma)(\beta - \delta) + \dots$$

oder:

$$S = \Sigma_3(\alpha - \beta)^2(\gamma - \delta)^2,$$

und ebenso:

$$T = \Sigma_6(\alpha - \beta)^2(\gamma - \delta)^2(\alpha - \gamma)(\beta - \delta).$$

Es ist nach Salmon's Bemerkung vortheilhafter, diesen letzteren Ausdruck in der Form

$$T = [(\alpha - \beta)(\gamma - \delta) - (\alpha - \gamma)(\delta - \beta)][(\alpha - \gamma)(\delta - \beta) - (\alpha - \delta)(\beta - \gamma)] \\ \times [(\alpha - \delta)(\beta - \gamma) - (\alpha - \beta)(\gamma - \delta)]$$

zu schreiben; denn nun erkennt man, dass die Gleichungen

$$S = 0, \quad T = 0$$

gleichmässig die Bedingung ausdrücken, unter welcher die Gleichung drei gleiche Wurzeln hat; und dass speciell $T = 0$ die Bedingung ausdrückt, unter welcher die vier Wurzeln der Gleichung — durch Punkte einer Geraden oder Strahlen eines Büschels repräsentirt — ein harmonisches System bilden.

6. Cayley gelangt am angeführten Orte zu derselben Gleichung für die Parallellfläche des Ellipsoids

$$(-\alpha\delta l + \alpha n + \gamma l + \beta m)(P^2 + Q^2) + (\alpha\epsilon l + \alpha\delta m + \beta\delta l + \beta n + \gamma m)(P + Q) \\ + 2\alpha\delta^2 l + \alpha\epsilon m + \beta\epsilon l + 2\beta\delta m + \gamma n.$$

Hierin sollen die Glieder mit $P^2 + Q^2$ und $P + Q$ verschwinden, so dass die beiden Gleichungen

$$-\alpha\delta l + \alpha n + \gamma l + \beta m = 0$$

und

$$\alpha\epsilon l + \alpha\delta m + \beta\delta l + \beta n + \gamma m = 0$$

zu lösen sind. Die erste wird mit $-\beta$ und die zweite mit α multiplicirt:

$$\alpha\beta\delta l - \beta\gamma l - \beta^2 m - \alpha\beta n = 0 \\ \alpha^2\epsilon l + \alpha\beta\delta l + \alpha^2\delta m + \alpha\gamma m + \alpha\beta n = 0$$

$$\text{addirt: } (\alpha^2\epsilon + 2\alpha\beta\delta - \beta\gamma)l + (\alpha^2\delta + \alpha\gamma - \beta^2)m = 0.$$

Dieser Gleichung wird genügt, wenn wir

$$l = -\alpha^2\delta - \alpha\gamma + \beta^2$$

und

$$m = \alpha^2\epsilon + 2\alpha\beta\delta - \beta\gamma$$

setzen. Die Gleichung

$$-\alpha\delta l + \alpha n + \gamma l + \beta m = 0$$

oder

$$\alpha n = (\alpha\delta - \gamma)l - \beta m$$

verwandelt sich dann in:

$$\alpha n = (\alpha\delta - \gamma)(-\alpha^2\delta - \alpha\gamma + \beta^2) - \beta(\alpha^2\epsilon + 2\alpha\beta\delta - \beta\gamma) \\ = -\alpha^3\delta^2 - \alpha^2\beta\epsilon - \alpha\beta^2\delta + \alpha\gamma^2.$$

Folglich ist:

$$n = -\alpha^2\delta^2 - \alpha\beta\epsilon - \beta^2\delta + \gamma^2.$$

Es bleibt dann im Nenner noch:

$$(2\alpha\delta^2 + \beta\epsilon)l + (\alpha\epsilon + 2\beta\delta)m + \gamma n$$

stehen, was aus den gefundenen Werthen von l , m , n zu berechnen ist.

Nun ergibt sich auch, warum wir oben den ersten rational zu machenden Nenner

$$P + Q - ah - \frac{1}{4}b$$

$$-3\delta q^2(ap + \frac{1}{2}bq) + a(qr - ps)w = a(qr - ps)w + (-\frac{1}{2}ab^2 + a^2c)pq^2 + (-\frac{1}{2}b^3 + \frac{1}{2}abc)q^3$$

addirt: $0 = a(qr - ps)w + a^3p^3 + a^2bp^2q + a^2cpq^2 + a^2dq^3,$

folglich:

$$(ps - qr)w = a(ap^3 + bp^2q + cpq^2 + dq^3),$$

oder, da $ps - qr = \pm 1$ ist,

$$\pm w = a(ap^3 + bp^2q + cpq^2 + dq^3)$$

und

$$ap^3 + bp^2q + cpq^2 + dq^3 = \pm \frac{w}{a}.$$

Da nun a hiernach immer in w aufgehen muss, so können wir $w = aN$ setzen, und wir haben:

$$ap^3 + bp^2q + cpq^2 + dq^3 = \pm N.$$

Setzen wir in der Gleichung

$$(ps - qr)w = a(ap^3 + bp^2q + cpq^2 + dq^3)$$

p statt r , q statt s , $kp + r$ statt p , $kq + s$ statt q und W statt w , wie es schon in §. 6. geschah, so erhalten wir, indem jetzt

$$(kp + r)q - (kq + s)p = qr - ps = \mp 1$$

an die Stelle von $ps - qr$ tritt:

$$\mp W = a[ap(kp + r)^3 + b(kp + r)^2(kq + s) + c(kp + r)(kq + s)^2 + d(kq + s)^3].$$

Es ist W der zu den im Zähler stehenden Zahlen T, U, V gehörige Nenner, welcher früher aus der Formel in §. 2:

$$v' = \pm a \left[\begin{array}{c} (ap + \frac{1}{3}bq)r^2 + \frac{2}{3}(bp + cq)rs + (\frac{1}{3}cp + dq)s^2 \\ - k'(ar^3 + br^2s + crs^2 + ds^3) \end{array} \right].$$

Hieraus folgt, weil

$$\mp a(ur^3 + br^2s + crs^2 + ds^3) = w'$$

ist:

$$\pm a[(ap + \frac{1}{3}bq)r^2 + \frac{2}{3}(bp + cq)rs + (\frac{1}{3}cp + dq)s^2] = v' - k'w'.$$

Wir haben nach §. 6.:

$$V =$$

$$\pm a[(ap + \frac{1}{3}bq)(kp + r)^2 + \frac{2}{3}(bp + cq)(kp + r)(kq + s) + (\frac{1}{3}cp + dq)(kq + s)^2]$$

oder, wenn nach k geordnet wird:

$$V = \pm a \left[\begin{array}{c} k^2(ap^3 + bp^2q + cpq^2 + dq^3) \\ + 2k[(ar + \frac{1}{3}bs)p^2 + \frac{2}{3}(br + cs)pq + (\frac{1}{3}cr + ds)q^2] \\ + (ap + \frac{1}{3}bq)r^2 + \frac{2}{3}(bp + cq)rs + (\frac{1}{3}cp + dq)s^2 \end{array} \right].$$

oder:

$$V = k^2w - 2kv + v' - k'w' = k(kw - 2v) + v' - k'w'.$$

Auch haben wir nach §. 7.:

$$W = \mp a[a(kp + r)^3 + b(kp + r)^2(kq + s) + c(kp + r)(kq + s)^2 + d(kq + s)^3]$$

oder:

$$W = \mp a \left\{ \begin{array}{c} k^3(ap^3 + bp^2q + cpq^2 + dq^3) \\ + 3k^2[(ar + \frac{1}{3}bs)p^2 + \frac{2}{3}(br + cs)pq + (\frac{1}{3}cr + ds)q^2] \\ + 3k[(ap + \frac{1}{3}bq)r^2 + \frac{2}{3}(bp + cq)rs + \frac{1}{3}(cp + dq)s^2] \\ + ar^3 + br^2s + crs^2 + ds^3 \end{array} \right\},$$

oder:

$$W = -k^3w + 3k^2v - 3k(v' - k'w') + w'.$$

$$\text{Auch ist } 3kV = 3k^3w - 6k^2v + 3k(v' - k'w')$$

$$\text{addirt: } W + 3kV = 2k^3w - 3k^2v + w',$$

folglich:

$$W = 2k^3w - 3k^2v - 3kV + w' = k[k(2kw - 3v) - 3V] + w'.$$

Die beiden Formeln:

$$V = k(kw - 2v) + v' - k'w'$$

$$\text{III)} \quad \frac{gP + fQ - \frac{4}{3}}{5} = -0,34571,$$

wobei $gP + fQ = -0,39520$ und $fP^2 + gQ^2 = -20,0660$

ist.

Für I) haben wir:

$$\frac{P + Q - \frac{4}{3}}{5} = 0 + \frac{1}{\varphi_1}.$$

Nach §. 2. ist

$$\varphi_1 = \frac{P^2 + Q^2 + (ah + \frac{1}{3}b)(P + Q) + ah^2 + \frac{2}{3}abh + \frac{1}{3}ac}{-a(ah^3 + bh^2 + ch + d)},$$

worin $h = 0$, $a = 5$, $b = 4$, $c = -5$, $d = -2$ ist, also:

$$\varphi_1 = \frac{P^2 + Q^2 + \frac{4}{3}(P + Q) - \frac{25}{3}}{10} = \frac{11,4648}{10} = 1 + \frac{1}{\varphi_2}.$$

Der zugehörige Näherungswerth ist $\frac{1}{1}$, der vorhergehende $\frac{0}{1}$, a
 $r = 0$, $s = 1$, $p = 1$, $q = 1$, $t = q = 1$, $u = ap + \frac{1}{3}bq = \frac{19}{3}$;

$$v = -a[(ar + \frac{1}{3}bs)p^2 + \frac{2}{3}(br + cs)pq + (\frac{1}{3}cr + ds)q^2] = -5\left(\frac{4}{3} - \frac{10}{3} - 2\right) =$$

$$w = a(ap^3 + bp^2q + cpq^2 + dq^3) = 5(5 + 4 - 5 - 2) = 10.$$

Demnach

$$\varphi_2 = \frac{P^2 + Q^2 + \frac{19}{3}(P + Q) + 20}{10} = \frac{68,2707}{10} = 6 + \frac{1}{\varphi_3}.$$

Der Näherungswerth ist $\frac{6}{7}$, also $p = 6$, $q = 7$, $t = 7$, $u =$
 $+ \frac{1}{3}bq = \frac{118}{3}$.

Es ist $w = 10$, $w' = 10$, $v = 20$ $v' = -\frac{25}{3}$, $k = 6$, $k' = 1$, al

$$V = k(kw - 2v) + v' - k'w' = 120 - \frac{25}{3} - 10 = \frac{305}{3},$$

$$W = k[k(2kw - 3v) - 3V] + w' = 6(360 - 305) + 10 = 340.$$

Also:

$$\varphi_3 = \frac{7(P^2+Q^2) + \frac{118}{3}(P+Q) + \frac{305}{3}}{340} = \frac{411,089}{340} = 1 + \frac{1}{\varphi_4}.$$

Der Näherungswerth ist $\frac{7}{8}$; also $p=7$, $q=8$, $t=8$, $u=5.7+4.8$
 $= \frac{137}{3}$.

Nun ist $w=340$, $w'=10$, $v=\frac{305}{3}$, $v'=20$, $k=1$, $k'=6$, also:

$$V = k(kw - 2v) + v' - k'w' = 340 - \frac{610}{3} + 20 - 60 = \frac{290}{3},$$

$$W = k[k(2kw - 3v) - 3V] + w' = 680 - 305 - 290 + 10 = 95,$$

$$\varphi_4 = \frac{8(P^2+Q^2) + \frac{137}{3}(P+Q) + \frac{290}{3}}{95} = \frac{974,4594}{95} = 10 + \frac{1}{\varphi_5}.$$

Die Entwicklung stellt sich also folgendermassen dar:

$$\frac{P+Q-\frac{4}{3}}{5} = 0 + \frac{1}{\varphi_1}, \quad \mathfrak{M}_1 = \frac{0}{1};$$

$$\varphi_1 = \frac{P^2+Q^2+\frac{4}{3}(P+Q)-\frac{25}{3}}{10} = 1 + \frac{1}{\varphi_2}, \quad \mathfrak{M}_2 = \frac{1}{1};$$

$$\varphi_2 = \frac{P^2+Q^2+\frac{19}{3}(P+Q)+20}{10} = 6 + \frac{1}{\varphi_3}, \quad \mathfrak{M}_3 = \frac{6}{7};$$

$$\varphi_3 = \frac{7(P^2+Q^2) + \frac{118}{3}(P+Q) + \frac{305}{3}}{340} = 1 + \frac{1}{\varphi_4}, \quad \mathfrak{M}_4 = \frac{7}{8};$$

$$\varphi_4 = \frac{8(P^2+Q^2) + \frac{137}{3}(P+Q) + \frac{290}{3}}{95} = 10 + \frac{1}{\varphi_5}, \quad \mathfrak{M}_5 = \frac{76}{87};$$

u. s. w.

Ebenso ist die Entwicklung der Wurzel II); nur muss, weil sie negativ ist, ihr Gegenheil genommen werden. Wir setzen daher $-y$ statt x in die Gleichung $5x^3+4x^2-5x-2=0$. Also:

$$5y^3-4y^2-5y+2=0.$$

Nun haben wir $a=5, b=-4, c=-5, d=2$. Die Cubikwurzeln P und Q haben jetzt den entgegengesetzten Werth von vorher, und wenn wir, der Vergleichung wegen, den vorigen Werth von P und Q beibehalten, so muss der Coefficient von $fP+gQ$ jetzt entgegengesetzt, also nicht $=ap+\frac{1}{3}bq$, sondern $=-ap-\frac{1}{3}bq$ genommen werden. Ausserdem verfahren wir wie vorher. Wir haben:

$$\frac{-(fP+gQ)+\frac{4}{3}}{5} = 1,32653 = 1 + \frac{1}{\varphi_1},$$

$$\varphi_1 = \frac{gP^2 + fQ^2 - (ah + \frac{1}{3}b)(fP + gQ) + a^2h^2 + \frac{2}{3}abh + \frac{1}{3}ac}{-a(ah^3 + bh^2 + ch + d)},$$

und, weil $h=1$,

$$\varphi_1 = \frac{gP^2 + fQ^2 - \frac{11}{3}(fP + gQ) + \frac{10}{3}}{10} = \frac{30,6248}{10} = 3 + \frac{1}{\varphi_2}.$$

Der Näherungswerth ist $\frac{4}{3}$, der vorige $\frac{1}{3}$, also $p=4, q=3, r=1, s=1, t=3, u=-ap-\frac{1}{3}bq=-20+4=-16$;

$$\begin{aligned} v &= -a[(ar + \frac{1}{3}bs)p^2 + \frac{2}{3}(br + cs)pq + (\frac{1}{3}cr + ds)q^2] \\ &= -5\left(\frac{176}{3} - 72 + 3\right) = \frac{155}{3}, \end{aligned}$$

$$w = a(ap^3 + bp^2q + cpq^2 + dq^3) = 5(320 - 192 - 180 + 54) = 10.$$

Demnach

$$\varphi_2 = \frac{3(gP^2 + fQ^2) - 16(fP + gQ) + \frac{155}{3}}{10} = \frac{160,0377}{10} = 16 + \frac{1}{\varphi_3}.$$

Der Näherungswerth ist $\frac{65}{49}$. Daher $p=65, q=49, t=49$,
 $u = -ap - \frac{1}{3}bq = -\frac{779}{3}, w=10, w'=10, v=\frac{155}{3}, v'=\frac{10}{3}, k=16,$
 $k'=3,$

also:

$$V = k(kw - 2v) + v' - k'w' = 16\left(\frac{480 - 310}{3}\right) + \frac{10}{3} - 30 = 880,$$

$$b^2e^2 = b^2e^2$$

über.

II.

Aus den drei Gleichungen

$$a = pp', \quad b = qp' + pq', \quad c = qq'$$

folgt:

$$cp^2 - bpq + aq^2 = p^2qq' - pq(qp' + pq') + q^2pp',$$

$$cp'^2 - bp'q' + aq'^2 = p'^2qq' - p'q'(qp' + pq') + q'^2pp';$$

also:

$$8) \dots \dots \dots \begin{cases} cp^2 - bpq + aq^2 = 0, \\ cp'^2 - bp'q' + aq'^2 = 0. \end{cases}$$

Aus den drei Gleichungen

$$a = pp', \quad d = rp' + pr', \quad f = rr'$$

folgt:

$$ar^2 - dpr + fp^2 = r^2pp' - pr(rp' + pr') + p^2rr',$$

$$ar'^2 - dp'r' + fp'^2 = r'^2pp' - p'r'(rp' + pr') + p'^2rr';$$

also:

$$9) \dots \dots \dots \begin{cases} ar^2 - dpr + fp^2 = 0, \\ ar'^2 - dp'r' + fp'^2 = 0. \end{cases}$$

Aus den drei Gleichungen

$$c = qq', \quad e = rq' + qr', \quad f = rr'$$

folgt:

$$cr^2 - eqr + fq^2 = r^2qq' - qr(rq' + qr') + q^2rr',$$

$$cr'^2 - eq'r' + fq'^2 = r'^2qq' - q'r'(rq' + qr') + q'^2rr';$$

also:

$$10) \dots \dots \dots \begin{cases} cr^2 - eqr + fq^2 = 0, \\ cr'^2 - eq'r' + fq'^2 = 0. \end{cases}$$

III.

Wenn nun a nicht verschwindet, so haben wir zur Bestimmung von

$$b^2 - 4ac \geq 0$$

ist:

$$\frac{r}{p} = \pm \frac{bd - 2ae \pm d\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a\sqrt{b^2 - 4ac}},$$

$$\frac{r'}{p'} = \mp \frac{bd - 2ae \mp d\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a\sqrt{b^2 - 4ac}}.$$

Man hat also die vier Formeln:

$$16) \dots \left\{ \begin{array}{l} \frac{q}{p} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad \frac{q'}{p'} = \frac{b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \\ \frac{r}{p} = \pm \frac{bd - 2ae \pm d\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a\sqrt{b^2 - 4ac}}, \\ \frac{r'}{p'} = \mp \frac{bd - 2ae \mp d\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a\sqrt{b^2 - 4ac}}; \end{array} \right.$$

in denen die oberen und unteren Zeichen sich auf einander beziehen, die aber nur unter der Voraussetzung

$$b^2 - 4ac \geq 0$$

gültig sind.

Wenn $b^2 - 4ac = 0$ ist, hat man die keine Zweideutigkeit lassenden Formeln 14) anzuwenden.

IV.

Wenn c nicht verschwindet, so haben wir zur Bestimmung von

$$\frac{p}{q}, \quad \frac{p'}{q'} \quad \text{und} \quad \frac{r}{q}, \quad \frac{r'}{q'}$$

nach 8) und 10) die folgenden Gleichungen:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 - \frac{b}{c} \cdot \frac{p}{q} + \frac{a}{c} = 0,$$

$$\left(\frac{p'}{q'}\right)^2 - \frac{b}{c} \cdot \frac{p'}{q'} + \frac{a}{c} = 0$$

und:

$$\left(\frac{r}{q}\right)^2 - \frac{e}{c} \cdot \frac{r}{q} + \frac{f}{c} = 0,$$

$$\left(\frac{r'}{q'}\right)^2 - \frac{e}{c} \cdot \frac{r'}{q'} + \frac{f}{c} = 0.$$

Man kann noch andere Ausdrücke für

$$\frac{r}{q}, \quad \frac{r'}{q'}$$

finden. Nach dem Obigen ist nämlich:

$$d - e \frac{p}{q} = c \frac{r}{q} \left(\frac{p'}{q'} - \frac{p}{q} \right),$$

$$e \frac{p'}{q'} - d = c \frac{r'}{q'} \left(\frac{p'}{q'} - \frac{p}{q} \right);$$

weil nun, wie wir schon wissen:

$$\frac{p}{q} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}, \quad \frac{p'}{q'} = \frac{b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}$$

ist, so ist:

$$d - e \frac{p}{q} = - \frac{be - 2cd \pm e \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c},$$

$$e \frac{p'}{q'} - d = \frac{be - 2cd \mp e \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}$$

und

$$c \left(\frac{p'}{q'} - \frac{p}{q} \right) = \mp \sqrt{b^2 - 4ac};$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$\frac{r}{q} \sqrt{b^2 - 4ac} = \pm \frac{be - 2cd \pm e \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c},$$

$$\frac{r'}{q'} \sqrt{b^2 - 4ac} = \mp \frac{be - 2cd \mp e \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c};$$

folglich, wenn

$$b^2 - 4ac \gtrless 0$$

ist:

$$\frac{r}{q} = \pm \frac{be - 2cd \pm e \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c \sqrt{b^2 - 4ac}},$$

$$\frac{r'}{q'} = \mp \frac{be - 2cd \mp e \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c \sqrt{b^2 - 4ac}}.$$

Man hat also die vier Formeln:

Aus den in 16) gefundenen Formeln:

$$\frac{r}{p} = \pm \frac{bd - 2ae \pm d \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a \sqrt{b^2 - 4ac}},$$

$$\frac{r'}{p'} = \mp \frac{bd - 2ae \mp d \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a \sqrt{b^2 - 4ac}};$$

in denen $b^2 - 4ac$ als nicht verschwindend vorausgesetzt worden ist, folgt:

$$(bd - 2ae) \frac{r}{p} = \pm \frac{(bd - 2ae)^2 \pm d(bd - 2ae) \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a \sqrt{b^2 - 4ac}},$$

$$(bd - 2ae) \frac{r'}{p'} = \mp \frac{(bd - 2ae)^2 \mp d(bd - 2ae) \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a \sqrt{b^2 - 4ac}};$$

also, weil

$$\begin{aligned} (bd - 2ae)^2 &= (b^2 - 4ac)(d^2 - 4af) \\ &= (d^2 - 4af) \sqrt{b^2 - 4ac} \cdot \sqrt{b^2 - 4ac} \end{aligned}$$

ist:

$$25) \left\{ \begin{aligned} (bd - 2ae) \frac{r}{p} &= \frac{d(bd - 2ae) \pm (d^2 - 4af) \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \\ (bd - 2ae) \frac{r'}{p'} &= \frac{d(bd - 2ae) \mp (d^2 - 4af) \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \end{aligned} \right.$$

Aus den in 22) gefundenen Formeln:

$$\frac{r}{q} = \pm \frac{be - 2cd \pm e \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c \sqrt{b^2 - 4ac}},$$

$$\frac{r'}{q'} = \mp \frac{be - 2cd \mp e \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c \sqrt{b^2 - 4ac}};$$

in denen gleichfalls $b^2 - 4ac$ als nicht verschwindend vorausgesetzt worden ist, folgt:

$$(be - 2cd) \frac{r}{q} = \pm \frac{(be - 2cd)^2 \pm e(be - 2cd) \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c \sqrt{b^2 - 4ac}},$$

$$(be - 2cd) \frac{r'}{q'} = \mp \frac{(be - 2cd)^2 \mp e(be - 2cd) \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c \sqrt{b^2 - 4ac}};$$

also, weil

$$\begin{aligned} (be - 2cd)^2 &= (b^2 - 4ac)(e^2 - 4cf) \\ &= (e^2 - 4cf) \sqrt{b^2 - 4ac} \cdot \sqrt{b^2 - 4ac} \end{aligned}$$

12)

$$\int_0^1 \frac{\partial x}{1+x} = \lg 2,$$

$$\int_0^1 \frac{x \partial x}{1+x} = -\lg 2 + 1,$$

$$\int_0^1 \frac{x^2 \partial x}{1+x} = \lg 2 - \frac{1}{2},$$

$$\int_0^1 \frac{x^3 \partial x}{1+x} = -\lg 2 + \frac{5}{6},$$

$$\int_0^1 \frac{x^4 \partial x}{1+x} = \lg 2 - \frac{7}{12},$$

$$\int_0^1 \frac{x^5 \partial x}{1+x} = -\lg 2 + \frac{47}{60},$$

u. s. w.

Die Werthe sämmtlicher Integrale sind positiv, wie sich folgert. Der Werth von $\lg 2$ ist zwischen zwei auf einander folgende Brüche eingeschlossen.

Aus Nr. 4) und 5) ergeben sich folgende Formen:

13)

$$\int_0^x \frac{x^{2m} \partial x}{a+bx} = \frac{a^{2m} \lg(a+bx)}{b^{2m+1}} + \frac{x^{2m}}{2mb} - \frac{ax^{2m-1}}{(2m-1)b^2} + \dots - \frac{a^{2m}}{b^{2m+1}}$$

14)

$$\int_0^x \frac{x^{2m+1} \partial x}{a+bx} = -\frac{a^{2m+1} \lg(a+bx)}{b^{2m+2}} + \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)b} - \frac{ax^{2m}}{2mb} + \dots + \frac{a^{2m+1}}{b^{2m+2}}$$

§. 3.

Bringt man nun mit den in §. 2. erhaltenen Resultaten Ausdruck $\lg(1+x)$ in Verbindung, so erhält man nach der wöhnlichen Methode:

1)

$$\int_0^x x^{2m-1} \lg(1+x) dx = \frac{x^{2m}}{2m} \lg(1+x) - \frac{1}{2m} \int_0^x \frac{x^{2m} dx}{1+x},$$

und hieraus durch Einführung aus Nr. 7) §. 2.:

2)

$$\int_0^x x^{2m-1} \lg(1+x) dx = \frac{x^{2m}-1}{2m} \lg(1+x) + \frac{1}{2m} \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \dots - \frac{x^{2m}}{2m} \right).$$

Auf gleiche Weise entsteht durch Integration und Einführung aus Nr. 8) §. 2.:

3)

$$\begin{aligned} \int_0^x x^{2m} \lg(1+x) dx &= \frac{x^{2m+1} \lg(1+x)}{2m+1} - \frac{1}{2m+1} \int_0^x \frac{x^{2m+1} dx}{1+x} \\ &= \frac{x^{2m+1} + 1}{2m+1} \lg(1+x) - \frac{1}{2m+1} \left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \dots + \frac{x^{2m+1}}{2m+1} \right). \end{aligned}$$

Für die Grenzen zwischen 0 und 1 ergeben sich folgende Formen:

4)

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^{2m-1} \lg(1+x) dx &= \frac{1}{2m} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2m} \right) \\ &= \frac{1}{2m} \sum_1^{2m} (-)^{u-1} \frac{1}{u}, \end{aligned}$$

5)

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^{2m} \lg(1+x) dx &= \frac{2 \lg 2}{2m+1} - \frac{1}{2m+1} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots + \frac{1}{2m+1} \right) \\ &= \frac{2 \lg 2}{2m+1} - \frac{1}{2m+1} \sum_1^{2m+1} (-)^{u-1} \frac{1}{u}. \end{aligned}$$

Hieraus erhält man folgende Integrale:

6)

$$\int_0^1 \lg(1+x) dx = 2\lg 2 - 1,$$

$$\int_0^1 x \lg(1+x) dx = \frac{1}{4},$$

$$\int_0^1 x^2 \lg(1+x) dx = \frac{2}{3}\lg 2 - \frac{5}{18},$$

$$\int_0^1 x^3 \lg(1+x) dx = \frac{7}{48},$$

$$\int_0^1 x^4 \lg(1+x) dx = \frac{2}{5}\lg 2 - \frac{47}{300},$$

$$\int_0^1 x^5 \lg(1+x) dx = \frac{37}{300},$$

$$\int_0^1 x^6 \lg(1+x) dx = \frac{2}{7}\lg 2 - \frac{319}{2040},$$

$$\int_0^1 x^7 \lg(1+x) dx = \frac{533}{6720},$$

u. s. w.

Verbindet man mit den aus Nr 4) und 5) sich ableiten und in Nr. 6) angegebenen Ausdrücken der Reihe nach die Werthe a_1, a_2, a_3, \dots , so erhält man folgende Darstellungen:

7)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sum_0^{2m-1} a_u x^u \lg(1+x) dx &= \sum_0^{m-1} \frac{a_{2u}}{2u+1} 2\lg 2 \\ &+ \sum_1^{2m} (-)^u \frac{a_{u-1}}{u} \left(\sum_1^u (-)^{u-1} \frac{1}{u} \right), \end{aligned}$$

8)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sum_0^{2m} a_u x^u \lg(1+x) dx &= \sum_0^m \frac{a_{2u}}{2u+1} 2\lg 2 \\ &+ \sum_1^{2m+1} (-)^u \frac{a_{u-1}}{u} \left(\sum_1^u (-)^{u-1} \frac{1}{u} \right). \end{aligned}$$

Hierin hat man in dem Gliede links und dem ersten Gliede rechts statt u allmählig die Werthe zwischen den angegebene

$$\int_0^1 (1-x)^4 \lg(1+x) dx = \frac{32}{5} \lg 2 - \frac{661}{150},$$

$$\int_0^1 (1-x)^5 \lg(1+x) dx = \frac{32}{3} \lg 2 - \frac{1327}{180},$$

u. s. w.

Aus den Darstellungen Nr. 9) bis 12) leiten sich folgende Integrale ab:

14)

$$\int_0^1 \frac{1-x^2}{1-x} \lg(1+x) dx = 2 \lg 2 - \frac{3}{4},$$

$$\int_0^1 \frac{1-x^3}{1-x} \lg(1+x) dx = \frac{8}{3} \lg 2 - \frac{37}{36},$$

$$\int_0^1 \frac{1-x^4}{1-x} \lg(1+x) dx = \frac{8}{3} \lg 2 - \frac{127}{144},$$

$$\int_0^1 \frac{1-x^5}{1-x} \lg(1+x) dx = \frac{46}{15} \lg 2 - \frac{3739}{3600},$$

$$\int_0^1 \frac{1-x^6}{1-x} \lg(1+x) dx = \frac{46}{15} \lg 2 - \frac{1123}{1200},$$

u. s. w.

15)

$$\int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x} \lg(1+x) dx = 2 \lg 2 - \frac{5}{4},$$

$$\int_0^1 \frac{1+x^3}{1+x} \lg(1+x) dx = \frac{8}{3} \lg 2 - \frac{55}{36},$$

$$\int_0^1 \frac{1-x^4}{1+x} \lg(1+x) dx = \frac{8}{3} \lg 2 - \frac{241}{144},$$

$$\int_0^1 \frac{1+x^5}{1+x} \lg(1+x) dx = \frac{46}{45} \lg 2 - \frac{6589}{3600},$$

$$\int_0^1 \frac{1-x^6}{1+x} \lg(1+x) dx = \frac{46}{45} \lg 2 - \frac{6959}{3600},$$

u. s. w.

§. 4.

Behandelt man auf gleiche Weise das Integral $\int x^{m-1} \lg(1-x) dx$, so ist

1)

$$\int_0^x x^{m-1} \lg(1-x) dx = \frac{x^m}{m} \lg(1-x) + \frac{1}{m} \int_0^x \frac{x^m}{1-x} dx.$$

Durch Einführung des Werthes aus Nr. 11) §. 2. entsteht

2)

$$\int_0^x x^{m-1} \lg(1-x) dx = \frac{x^m-1}{m} \lg(1-x) - \frac{1}{m} \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots \frac{x^m}{m} \right)$$

und für die Grenzen zwischen 0 und 1

3)

$$\int_0^1 x^{m-1} \lg(1-x) dx = -\frac{1}{m} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \frac{1}{m} \right) = -\frac{1}{m} \frac{C(1,2,\dots,m)^{m-1}}{1.2.3\dots m}.$$

Hierin bedeutet $C(1,2,3,\dots,m)^{m-1}$ die Summe der Producte der Verbindungen ohne Wiederholungen aus den Elementen 1, 2, 3, ..., m zur $m-1$ Classe. Hieraus erhält man folgende Integrale:

4)

$$\int_0^1 \lg(1-x) dx = -1,$$

$$\int_0^1 x \lg(1-x) dx = -\frac{3}{4},$$

$$\int_0^1 x^2 \lg(1-x) dx = -\frac{11}{18},$$

$$\int_0^1 x^3 \lg(1-x) dx = -\frac{25}{48},$$

$$\int_0^1 x^4 \lg(1-x) dx = -\frac{137}{300},$$

$$\int_0^1 x^5 \lg(1-x) dx = -\frac{49}{120},$$

$$\int_0^1 x^6 \lg(1-x) dx = -\frac{363}{980},$$

$$\int_0^1 x^7 \lg(1-x) dx = -\frac{761}{2240},$$

u. s. w.

Verbindet man auch hier die aus Nr. 3) fließenden Ausdrücke der Reihe nach mit a_0, a_1, a_2, \dots und verfährt wie in §. 1. schah, so erhält man folgende Darstellungen:

5)

$$\int_0^1 \sum_1^m a_{u-1} x^{u-1} \lg(1-x) dx = - \sum_1^m \frac{a_{u-1}}{u} \left(\sum_1^u \frac{1}{u} \right),$$

6)

$$\int_0^1 \frac{1-x^m}{1-x} \lg(1-x) dx = - \sum_1^m \frac{1}{u} \left(\sum_1^u \frac{1}{u} \right),$$

7)

$$\int_0^1 \frac{1(-)^{m-1} x^m}{1+x} \lg(1-x) dx = - \sum_1^m (-)^{u-1} \frac{1}{u} \left(\sum_1^u \frac{1}{u} \right)$$

Werden die Vorzeichen der Potenzen des Binomiums (1) statt der a eingeführt, so erhält man folgende Integrale, die in weiteren Anwendungen dienen:

8)

$$\int_0^1 (1+x) \lg(1-x) dx = -\frac{7}{4},$$

$$\int_0^1 (1+x)^2 \lg(1-x) dx = -\frac{28}{9},$$

$$\int_0^1 (1+x)^3 \lg(1-x) dx = -\frac{269}{48},$$

$$\int_0^1 (1+x)^4 \lg(1-x) dx = -\frac{1531}{150},$$

$$\int_0^1 (1+x)^5 \lg(1-x) dx = -\frac{3377}{180},$$

u. s. w.

Aus Nr. 7) und 8) leiten sich folgende Integrale ab:

9)

$$\int_0^1 \frac{1-x^2}{1-x} \lg(1-x) dx = -\frac{7}{4},$$

$$\int_0^1 \frac{1-x^3}{1-x} \lg(1-x) dx = -\frac{85}{36},$$

$$\int_0^1 \frac{1-x^4}{1-x} \lg(1-x) dx = -\frac{415}{144},$$

$$\int_0^1 \frac{1-x^5}{1-x} \lg(1-x) dx = -\frac{12019}{3600},$$

$$\int_0^1 \frac{1-x^6}{1-x} \lg(1-x) dx = -\frac{13489}{3600},$$

u. s. w.

10)

$$\int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x} \lg(1-x) dx = -\frac{1}{4},$$

$$\int_0^1 \frac{1+x^3}{1+x} \lg(1-x) dx = -\frac{31}{36},$$

$$\int_0^1 \frac{1-x^4}{1+x} \lg(1-x) dx = -\frac{49}{144},$$

$$\int_0^1 \frac{1+x^5}{1+x} \lg(1-x) dx = -\frac{2869}{3600},$$

$$\int_0^1 \frac{1-x^6}{1+x} \lg(1-x) dx = -\frac{1399}{3600},$$

u. s. w.

Nachdem in diesem Paragraphen gezeigt ist, wie die in Nr. 9) und 10) aufgestellten Integrale gefunden werden, und dasselbe auch von den in §. 3. Nr. 14) und 15) aufgestellten gilt, so wird im Folgenden auf Integrale dieser Form nicht weiter Rücksicht genommen werden. Die Darstellung der Integrale dieser

1)

$$\int_0^1 (1+x)^{m-1} \lg(1+x) dx = \frac{2^m \lg 2}{m} - \frac{2^m - 1}{m^2},$$

woraus sich folgende Integrale ableiten:

2)

$$\int_0^1 \lg(1+x) dx = 2 \lg 2 - 1,$$

$$\int_0^1 (1+x) \lg(1+x) dx = 2 \lg 2 - \frac{3}{4},$$

$$\int_0^1 (1+x)^2 \lg(1+x) dx = \frac{8}{3} \lg 2 - \frac{7}{9},$$

$$\int_0^1 (1+x)^3 \lg(1+x) dx = 4 \lg 2 - \frac{15}{16},$$

$$\int_0^1 (1+x)^4 \lg(1+x) dx = \frac{32}{5} \lg 2 - \frac{31}{25},$$

$$\int_0^1 (1+x)^5 \lg(1+x) dx = \frac{32}{3} \lg 2 - \frac{7}{4},$$

u. s. w.

Aus Nr. 6) §. 5. erhält man für $q=1$, $p=1$ und $m-1$ statt r :

3)

$$\int_0^1 (1-x)^{m-1} \lg(1-x) dx = -\frac{1}{m^2},$$

und man erkennt, dass die hieraus sich ableitenden Integrale die Glieder der zweiten reciproken Potenzreihe bilden. Setzt man $-m-1$ statt r , $q=1$, $p=1$ in Nr. 4) §. 5., so erhält man:

4)

$$\int_0^1 \frac{\lg(1+x) dx}{(1+x)^{m+1}} = -\frac{\lg 2}{m \cdot 2^m} + \frac{2^m - 1}{m^2 \cdot 2^m}.$$

Diess führt zu folgenden Integralen:

5)

$$\int_0^1 \frac{\lg(1+x) dx}{(1+x)^2} = -\frac{\lg 2}{2} + \frac{1}{2},$$

2)

$$\int_0^1 x^{2m} \lg \frac{1+x}{1-x} dx = \frac{x^{2m+1}+1}{2m+1} \lg(1+x) - \frac{x^{2m+1}-1}{2m+1} \lg(1-x) \\ + \frac{1}{2m+1} \left(x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + \dots + \frac{x^{2m}}{m} \right).$$

Hieraus erhält man für die Grenzen zwischen 0 und 1:

3)

$$\int_0^1 x^{2m-1} \lg \frac{1+x}{1-x} dx = \frac{1}{m} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2m-1} \right),$$

4)

$$\int_0^1 x^{2m} \lg \frac{1+x}{1-x} dx = \frac{2 \lg 2}{2m+1} + \frac{1}{2m+1} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m} \right).$$

Hieraus ergeben sich folgende Integrale;

5)

$$\int_0^1 \lg \frac{1+x}{1-x} dx = 2 \lg 2,$$

$$\int_0^1 x \lg \frac{1+x}{1-x} dx = 1,$$

$$\int_0^1 x^2 \lg \frac{1+x}{1-x} dx = \frac{5 \lg 2}{3} + \frac{1}{3},$$

$$\int_0^1 x^3 \lg \frac{1+x}{1-x} dx = \frac{2}{3},$$

$$\int_0^1 x^4 \lg \frac{1+x}{1-x} dx = \frac{2 \lg 2}{5} + \frac{3}{10},$$

$$\int_0^1 x^5 \lg \frac{1+x}{1-x} dx = \frac{23}{25},$$

$$\int_0^1 x^6 \lg \frac{1+x}{1-x} dx = \frac{2 \lg 2}{7} + \frac{11}{42},$$

$$\int_0^1 x^7 \lg \frac{1+x}{1-x} dx = \frac{44}{105},$$

u. s. w.

Man kann nun die in 3)–5) enthaltenen Darstellungen in

8)

$$\int_0^1 (1+x^2) \lg \frac{1+x}{1-x} dx = \frac{5}{3} \lg 2 + \frac{1}{3},$$

$$\int_0^1 (1+x^2)^2 \lg \frac{1+x}{1-x} dx = \frac{56}{15} \lg 2 + \frac{29}{30},$$

$$\int_0^1 (1+x^2)^3 \lg \frac{1+x}{1-x} dx = \frac{192}{35} \lg 2 + \frac{227}{105},$$

$$\int_0^1 (1+x^2)^4 \lg \frac{1+x}{1-x} dx = \frac{2656}{315} \lg 2 + \frac{16679}{3780},$$

u. s. w.

9)

$$\int_0^1 (1-x^2) \lg \frac{1+x}{1-x} dx = \frac{4}{3} \lg 2 - \frac{1}{3},$$

$$\int_0^1 (1-x^2)^2 \lg \frac{1+x}{1-x} dx = \frac{16}{15} \lg 2 - \frac{11}{30},$$

$$\int_0^1 (1-x^2)^3 \lg \frac{1+x}{1-x} dx = \frac{32}{35} \lg 2 - \frac{38}{105},$$

$$\int_0^1 (1-x^2)^4 \lg \frac{1+x}{1-x} dx = \frac{256}{315} \lg 2 - \frac{1321}{3780},$$

u. s. w.

10)

$$\int_0^1 x(1+x^2) \lg \frac{1+x}{1-x} dx = \frac{5}{3},$$

$$\int_0^1 x(1+x^2)^2 \lg \frac{1+x}{1-x} dx = \frac{128}{45},$$

$$\int_0^1 x(1+x^2)^3 \lg \frac{1+x}{1-x} dx = \frac{104}{21},$$

$$\int_0^1 x(1+x^2)^4 \lg \frac{1+x}{1-x} dx = \frac{13808}{1575},$$

u. s. w.

11)

$$\int_0^1 x(1-x^2) \lg \frac{1+x}{1-x} dx = \frac{1}{3},$$

$$\int_0^1 x(1-x^2)^2 \lg \frac{1+x}{1-x} dx = \frac{8}{45},$$

$$\int_0^1 x(1-x^2)^3 \lg \frac{1+x}{1-x} dx = \frac{4}{35},$$

$$\int_0^1 x(1-x^2)^4 \lg \frac{1+x}{1-x} dx = \frac{128}{1575}$$

u. s. w.

Diese Darstellungen lassen sich, wie man sieht, beliebig weiter fortsetzen.

§. 8.

Zählt man die Gleichungen Nr. 2) §. 4. und Nr. 2) und 3) §. 3. zusammen, so erhält man nach den nöthigen Umformungen:

1)

$$\int_0^x x^{2m-1} \lg(1-x^2) dx = \frac{x^{2m}-1}{2m} \lg(1-x^2) - \frac{1}{2m} (x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + \dots + \frac{x^{2m}}{m}),$$

2)

$$\begin{aligned} \int_0^x x^{2m} \lg(1-x^2) dx &= \frac{x^{2m+1}+1}{2m+1} \lg(1+x) + \frac{x^{2m+1}-1}{2m+1} \lg(1-x) \\ &\quad - \frac{2}{2m+1} (x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2m+1}}{2m+1}). \end{aligned}$$

Für die Grenzen zwischen 0 und 1 folgt hieraus:

3)

$$\int_0^1 x^{2m-1} \lg(1-x^2) dx = -\frac{1}{2m} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m}) = -\frac{1}{2m} \frac{C(1,2,\dots,m)^{m-1}}{1.2.3\dots m},$$

4)

$$\int_0^1 x^{2m} \lg(1-x^2) dx = \frac{2 \lg 2}{2m+1} - \frac{2}{2m+1} (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2m+1}).$$

Hieraus leiten sich folgende Integrale ab:

5)

$$\int_0^1 \lg(1-x^2) dx = 2 \lg 2 - 2,$$

$$\int_0^1 x \lg(1-x^2) dx = -\frac{1}{2},$$

$$\int_0^1 x^2 \lg(1-x^2) dx = \frac{2}{3} \lg 2 - \frac{8}{9},$$

$$\int_0^1 x^3 \lg(1-x^2) dx = -\frac{3}{8},$$

$$\int_0^1 x^4 \lg(1-x^2) dx = \frac{2}{5} \lg 2 - \frac{46}{75},$$

$$\int_0^1 x^5 \lg(1-x^2) dx = -\frac{11}{36},$$

$$\int_0^1 x^6 \lg(1-x^2) dx = \frac{2}{7} \lg 2 - \frac{352}{735},$$

$$\int_0^1 x^7 \lg(1-x^2) dx = -\frac{25}{96},$$

$$\int_0^1 x^8 \lg(1-x^2) dx = \frac{2}{9} \lg 2 - \frac{1126}{2835},$$

$$\int_0^1 x^9 \lg(1-x^2) dx = -\frac{137}{600},$$

u. s. w.

Werden auch diese Integrale nach den früher gemachten Bemerkungen mit den Vorzeichen der Binomien $(1 \pm x)$ versehen, so erhält man:

6)

$$\int_0^1 (1+x) \lg(1-x^2) dx = 2 \lg 2 - \frac{5}{2},$$

$$\int_0^1 (1+x)^2 \lg(1-x^2) dx = \frac{8}{3} \lg 2 - \frac{35}{9},$$

$$\int_0^1 (1+x)^3 \lg(1-x^2) dx = 4 \lg 2 - \frac{157}{24},$$

$$\int_0^1 (1-x^2)^3 \lg(1-x^2) dx = \frac{32}{35} \lg 2 - \frac{2552}{3675},$$

.....

10)

$$\int_0^1 x(1+x^2) \lg(1-x^2) dx = -\frac{7}{8},$$

$$\int_0^1 x(1+x^2)^2 \lg(1-x^2) dx = -\frac{16}{9},$$

$$\int_0^1 x(1+x^2)^3 \lg(1-x^2) dx = -\frac{269}{96}$$

$$\int_0^1 x(1+x^2)^4 \lg(1-x^2) dx = -\frac{1531}{300},$$

.....

11)

$$\int_0^1 x(1-x^2) \lg(1-x^2) dx = -\frac{1}{8},$$

$$\int_0^1 x(1-x^2)^2 \lg(1-x^2) dx = -\frac{1}{18},$$

$$\int_0^1 x(1-x^2)^3 \lg(1-x^2) dx = -\frac{1}{32},$$

$$\int_0^1 x(1-x^2)^4 \lg(1-x^2) dx = -\frac{1}{50},$$

.....

12)

$$\int_0^1 x(1-x^2)^m \lg(1-x^2) dx = -\frac{1}{2(m+1)^2}.$$

Dieses Integral ist ein besonderer Fall von dem in Nr. 6 aufgestellten, wenn dort $q = r$, $r = m$ und $p = 1$ geschrieben wird. Die Vergleichung der eben in Nr. 6)–10) aufgestellten Resultate mit den in §. 5. entwickelten allgemeinen Formen zeigt, dass man auf dem bisher befolgten Wege eine reichere Auswahl von Integralen erhält, als diejenigen sind, welche sich aus meinen Integralformeln ableiten lassen.

7)

$$\int_0^x \frac{x^{4m} \partial x}{a + bx^2} = \frac{x^{4m-1}}{b(4m-1)} - \frac{ax^{4m-3}}{b^2(4m-3)} \cdots - \frac{a^{2m-1}x}{b^{2m}} + \frac{a^{2m}}{b^{2m}} \int_0^x \frac{\partial x}{a + bx^2}$$

8)

$$\int_0^x \frac{x^{4m+1} \partial x}{a + bx^2} = \frac{x^{4m}}{b \cdot 4m} - \frac{a \cdot x^{4m-2}}{b^2 \cdot (4m-2)} \cdots - \frac{a^{2m-1}x}{b^{2m} \cdot 2} + \frac{a^{2m}}{b^{2m}} \int_0^x \frac{x \partial x}{a + bx^2}$$

9)

$$\int_0^x \frac{x^{4m+2} \partial x}{a + bx^2} = \frac{x^{4m+1}}{b(4m+1)} - \frac{ax^{4m-1}}{b^2 \cdot (4m-1)} \cdots + \frac{a^{2m}x}{b^{2m+1}} - \frac{a^{2m+1}}{b^{2m+1}} \int_0^x \frac{\partial x}{a + bx^2}$$

10)

$$\int_0^x \frac{x^{4m+3} \partial x}{a + bx^2} = \frac{x^{4m+2}}{b(4m+2)} - \frac{ax^{4m}}{b^2 \cdot 4m} \cdots + \frac{a^{2m}x^2}{b^{2m+1} \cdot 2} - \frac{a^{2m+1}}{b^{2m+1}} \int_0^1 \frac{x \partial x}{a + bx^2}$$

Hierin ist:

11)

$$\int_0^x \frac{\partial x}{x + bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \text{ArcTg } x \sqrt{\frac{b}{a}},$$

12)

$$\int_0^x \frac{x \partial x}{a + bx^2} = \frac{1}{2b} \lg \frac{a + bx^2}{a}.$$

Aus Nr. 6) leiten sich folgende Integrale ab:

13)

$$\int_0^1 \frac{\partial x}{1 + x^2} = \frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^1 \frac{x \partial x}{1 + x^2} = \frac{1}{2} \lg 2,$$

$$\int_0^1 \frac{x^2 \partial x}{1 + x^2} = -\frac{\pi}{4} + 1,$$

$$\int_0^1 \frac{x^3 \partial x}{1 + x^2} = -\frac{1}{2} \lg 2 + \frac{1}{2},$$

$$\int_0^1 \frac{x^4 \partial x}{1 + x^2} = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3},$$

3)

$$\int_0^x x^{4m+1} \lg(1+x^2) dx$$

$$= \frac{x^{4m+2} + 1}{4m+2} \lg(1+x^2) - \frac{2}{4m+2} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6} \dots + \frac{x^{4m+2}}{4m+2} \right),$$

4)

$$\int_0^x x^{4m+3} \lg(1+x^2) dx$$

$$= \frac{x^{4m+4}}{4m+4} \lg(1+x^2) - \frac{2 \operatorname{ArcTg} x}{4m+4} + \frac{2}{4m+4} \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \dots - \frac{x^{4m+3}}{4m+3} \right),$$

5)

$$\int_0^x x^{4m+5} \lg(1+x^2) dx$$

$$= \frac{x^{4m+6} - 1}{4m+6} \lg(1+x^2) + \frac{2}{4m+6} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6} \dots - \frac{x^{4m+4}}{4m+4} \right).$$

Für die Grenzen zwischen 0 und 1 entsteht hieraus:

6)

$$\int_0^1 x^{4m} \lg(1+x^2) dx = \frac{\lg 2}{4m+1} + \frac{\pi}{2(4m+1)} - \frac{2}{4m+1} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \dots + \frac{1}{4m+1} \right),$$

$$\int_0^1 x^{4m+1} \lg(1+x^2) dx = \frac{\lg 2}{2m+1} - \frac{1}{4m+2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2m+1} \right),$$

$$\int_0^1 x^{4m+2} \lg(1+x^2) dx = \frac{\lg 2}{4m+3} - \frac{\pi}{2(4m+3)} + \frac{2}{4m+3} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \dots - \frac{1}{4m+3} \right),$$

$$\int_0^1 x^{4m+3} \lg(1+x^2) dx = \frac{1}{4m+4} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \dots - \frac{1}{2m+2} \right).$$

Hieraus ergeben sich folgende Integrale:

7)

$$\int_0^1 \lg(1+x^2) dx = \lg 2 + \frac{1}{2} \pi - 2,$$

$$\int_0^1 x \lg(1+x^2) dx = \lg 2 - \frac{1}{2},$$

$$\int_0^1 x^2 \lg(1+x^2) dx = \frac{1}{3} \lg 2 - \frac{\pi}{6} + \frac{4}{9},$$

$$\int_0^1 x^3 \lg(1+x^2) dx = \frac{1}{8},$$

$$\int_0^1 x^4 \lg(1+x^2) dx = \frac{1}{5} \lg 2 + \frac{\pi}{10} - \frac{26}{75},$$

$$\int_0^1 x^5 \lg(1+x^2) dx = \frac{1}{3} \lg 2 - \frac{5}{36},$$

$$\int_0^1 x^6 \lg(1+x^2) dx = \frac{1}{7} \lg 2 - \frac{\pi}{14} + \frac{152}{735},$$

$$\bullet \int_0^1 x^7 \lg(1+x^2) dx = \frac{7}{96},$$

$$\int_0^1 x^8 \lg(1+x^2) dx = \frac{1}{9} \lg 2 + \frac{\pi}{18} - \frac{526}{2835},$$

u. s. w.

Werden diese Darstellungen auf die früher angegebene Weise behandelt, so leiten sich hieraus folgende Integrale ab:

8)

$$\int_0^1 (1+x) \lg(1+x^2) dx = 2 \lg 2 + \frac{\pi}{2} - \frac{5}{2},$$

$$\int_0^1 (1+x)^2 \lg(1+x^2) dx = \frac{10}{3} \lg 2 + \frac{\pi}{3} - \frac{23}{9},$$

$$\int_0^1 (1+x)^3 \lg(1+x^2) dx = 5 \lg 2 - \frac{49}{24},$$

$$\int_0^1 (1+x)^4 \lg(1+x^2) dx = \frac{36}{5} \lg 2 - \frac{2\pi}{5} - \frac{59}{60},$$

$$\int_0^1 (1+x)^5 \lg(1+x^2) dx = \frac{32}{3} \lg 2 - \frac{2\pi}{3} - \frac{61}{90},$$

u. s. w.

9)

$$\int_0^1 (1-x) \lg(1+x^2) dx = \frac{1}{2} \pi - \frac{3}{2},$$

$$\int_0^1 (1-x)^2 \lg(1+x^2) dx = -\frac{2}{3} \lg 2 + \frac{\pi}{3} - \frac{5}{9},$$

$$\int_0^1 (1-x)^3 \lg(1+x^2) dx = -\lg 2 + \frac{17}{24},$$

$$\int_0^1 (1-x)^4 \lg(1+x^2) dx = -\frac{4}{5} \lg 2 - \frac{2\pi}{5} + \frac{91}{50},$$

$$\int_0^1 (1-x)^5 \lg(1+x^2) dx = -\frac{2\pi}{3} + \frac{21}{10},$$

u. s. w.

10)

$$\int_0^1 x(1+x^2) \lg(1+x^2) dx = \lg 2 - \frac{3}{8},$$

$$\int_0^1 x(1+x^2)^2 \lg(1+x^2) dx = \frac{4}{3} \lg 2 - \frac{7}{18},$$

$$\int_0^1 x(1+x^2)^3 \lg(1+x^2) dx = 2 \lg 2 - \frac{15}{32},$$

$$\int_0^1 x(1+x^2)^4 \lg(1+x^2) dx = \frac{16}{5} \lg 2 - \frac{31}{50},$$

u. s. w.

11)

$$\int_0^1 x(1+x^2)^m \lg(1+x^2) dx = \frac{2^m \lg 2}{m+1} - \frac{2^{m+1}-1}{2(m+1)^2}.$$

12)

$$\int_0^1 x(1-x^2) \lg(1+x^2) dx = \lg 2 - \frac{5}{8},$$

$$\int_0^1 x(1-x^2)^2 \lg(1+x^2) dx = \frac{4}{3} \lg 2 - \frac{8}{9},$$

$$\int_0^1 x(1-x^2)^3 \lg(1+x^2) dx = 2 \lg 2 - \frac{131}{96},$$

$$\int_0^1 x(1-x^2)^4 \lg(1+x^2) dx = \frac{16}{5} \lg 2 - \frac{661}{300},$$

u. s. w.

Das in Nr. 11) angegebene Integral ist ein besonderer Fall von dem in Nr. 4) §. 5. angegebenen, wenn dort $r = m$, $q = 2$ und $p = 1$ gesetzt wird. Die übrigen Integrale lassen sich nicht aus den in §. 5. angegebenen Gleichungen ableiten. Man sieht, wie die hier aufgefundenen Darstellungen ein reiches Feld der Anwendung haben.

§. 11.

Verbindet man die Darstellungen in Nr. 6) §. 10 mit denen in Nr. 3) und 4) §. 8., indem man in letztere die entsprechenden Werthe für m einführt, so erhält man:

1)

$$\int_0^1 x^{4m} \lg \frac{1+x^2}{1-x^2} dx = -\frac{\lg 2}{4m+1} + \frac{\pi}{2(4m+1)} + \frac{4}{4m+1} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{4m+1} \right),$$

2)

$$\int_0^1 x^{4m+1} \lg \frac{1+x^2}{1-x^2} dx = \frac{\lg 2}{2m+1} + \frac{1}{4m+2} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{m} \right),$$

3)

$$\int_0^1 x^{4m+2} \lg \frac{1+x^2}{1-x^2} dx = -\frac{\lg 2}{4m+3} - \frac{\pi}{2(4m+3)} + \frac{4}{4m+3} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{4m+1} \right),$$

4)

$$\int_0^1 x^{4m+3} \lg \frac{1+x^2}{1-x^2} dx = \frac{1}{2m+2} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2m+1} \right).$$

Hieraus leiten sich folgende Integrale ab:

5)

$$\int_0^1 \lg \frac{1+x^2}{1-x^2} dx = -\lg 2 + \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^1 x \lg \frac{1+x^2}{1-x^2} dx = \lg 2,$$

$$\int_0^1 x^2 \lg \frac{1+x^2}{1-x^2} dx = -\frac{1}{3} \lg 2 - \frac{\pi}{6} + \frac{4}{3},$$

$$\int_0^1 x^3 \lg \frac{1+x^2}{1-x^2} dx = \frac{1}{2},$$

$$\int_0^1 x^4 \lg \frac{1+x^2}{1-x^2} dx = -\frac{\lg 2}{5} + \frac{\pi}{10} + \frac{4}{15},$$

$$\int_0^1 x^6 \lg \frac{1+x^2}{1-x^2} dx = \frac{1}{3} \lg 2 + \frac{1}{6},$$

$$\int_0^1 x^8 \lg \frac{1+x^2}{1-x^2} dx = -\frac{\lg 2}{7} - \frac{\pi}{14} + \frac{24}{35},$$

$$\int_0^1 x^7 \lg \frac{1+x^2}{1-x^2} dx = \frac{1}{3},$$

$$\int_0^1 x^9 \lg \frac{1+x^2}{1-x^2} dx = -\frac{\lg 2}{9} + \frac{\pi}{18} + \frac{40}{189},$$

u. s. w.

Werden diese Integrale mit den Vorzahlen der Potenzen Binomiums $(1 \pm x)$ verbunden, so entsteht:

6)

$$\int_0^1 (1+x) \lg \frac{1+x^2}{1-x^2} dx = \frac{1}{4} \pi,$$

$$\int_0^1 (1+x)^2 \lg \frac{1+x^2}{1-x^2} dx = \frac{2}{3} \lg 2 + \frac{1}{3} \pi + \frac{4}{3},$$

$$\int_0^1 (1+x)^3 \lg \frac{1+x^2}{1-x^2} dx = \lg 2 + \frac{9}{2},$$

$$\int_0^1 (1+x)^4 \lg \frac{1+x^2}{1-x^2} dx = \frac{4}{5} \lg 2 - \frac{2\pi}{5} + \frac{154}{15},$$

$$\int_0^1 (1+x)^5 \lg \frac{1+x^2}{1-x^2} dx = -\frac{2\pi}{3} + \frac{119}{6},$$

u. s. w.

7)

$$\int_0^1 (1-x) \lg \frac{1+x^2}{1-x^2} dx = -2 \lg 2 + \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^1 (1-x)^2 \lg \frac{1+x^2}{1-x^2} dx = -\frac{10}{3} \lg 2 + \frac{\pi}{3} + \frac{4}{3},$$

$$\int_0^1 (1-x)^3 \lg \frac{1+x^2}{1-x^2} dx = -5 \lg 2 + \frac{7}{2},$$

$$2) \quad \int_0^1 x^{4m+1} \lg(1-x^4) dx = \frac{\lg 2}{2m+1} - \frac{1}{2m+1} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2m+1}\right)$$

$$3) \quad \int_0^1 x^{4m+2} \lg(1-x^4) dx = \frac{3 \lg 2}{4m+3} - \frac{\pi}{2(4m+3)} - \frac{4}{4m+3} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{4m+3}\right),$$

$$4) \quad \int_0^1 x^{4m+3} \lg(1-x^4) dx = -\frac{1}{4m+4} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{m+1}\right).$$

Hieraus leiten sich folgende Integrale ab:

$$5) \quad \begin{aligned} \int_0^1 \lg(1-x^4) dx &= 3 \lg 2 + \frac{\pi}{2} - 4, \\ \int_0^1 x \lg(1-x^4) dx &= \lg 2 - 1, \\ \int_0^1 x^2 \lg(1-x^4) dx &= \lg 2 - \frac{\pi}{6} - \frac{4}{9}, \\ \int_0^1 x^3 \lg(1-x^4) dx &= -\frac{1}{4}, \\ \int_0^1 x^4 \lg(1-x^4) dx &= \frac{3 \lg 2}{5} + \frac{\pi}{10} - \frac{24}{25}, \\ \int_0^1 x^5 \lg(1-x^4) dx &= \frac{1}{3} \lg 2 - \frac{4}{9}, \\ \int_0^1 x^6 \lg(1-x^4) dx &= \frac{3 \lg 2}{7} - \frac{\pi}{14} - \frac{40}{147}, \\ \int_0^1 x^7 \lg(1-x^4) dx &= -\frac{3}{16}, \\ \int_0^1 x^8 \lg(1-x^4) dx &= \frac{1}{3} \lg 2 + \frac{\pi}{18} - \frac{236}{405}, \end{aligned}$$

u. s. w.

Ebenso erhält man durch Anwendung der angezeigten Meth

$$6) \quad \begin{aligned} \int_0^1 (1+x) \lg(1-x^4) dx &= 4 \lg 2 + \frac{1}{2} \pi - 5, \\ \int_0^1 (1+x)^2 \lg(1-x^4) dx &= 6 \lg 2 + \frac{1}{3} \pi - \frac{58}{9}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 (1+x)^3 \lg(1-x^4) dx &= 9 \lg 2 - \frac{103}{12}, \\ \int_0^1 (1+x)^4 \lg(1-x^4) dx &= \frac{68 \lg 2}{5} - \frac{2\pi}{5} - \frac{947}{75}, \\ \int_0^1 (1+x)^5 \lg(1-x^4) dx &= \frac{64 \lg 2}{3} - \frac{2\pi}{3} - \frac{1907}{90},\end{aligned}$$

u. s. w.

7)

$$\begin{aligned}\int_0^1 (1-x) \lg(1-x^4) dx &= 2 \lg 2 + \frac{1}{4}\pi - 3, \\ \int_0^1 (1-x)^2 \lg(1-x^4) dx &= 2 \lg 2 + \frac{1}{4}\pi - \frac{22}{9}, \\ \int_0^1 (1-x)^3 \lg(1-x^4) dx &= 3 \lg 2 - \frac{28}{12}, \\ \int_0^1 (1-x)^4 \lg(1-x^4) dx &= \frac{28 \lg 2}{5} - \frac{2\pi}{5} - \frac{197}{75}, \\ \int_0^1 (1-x)^5 \lg(1-x^4) dx &= \frac{32 \lg 2}{3} - \frac{2\pi}{3} - \frac{53}{10},\end{aligned}$$

u. s. w.

8)

$$\begin{aligned}\int_0^1 x(1+x^2) \lg(1-x^4) dx &= \lg 2 - \frac{5}{4}, \\ \int_0^1 x(1+x^2)^2 \lg(1-x^4) dx &= \frac{4 \lg 2}{3} - \frac{31}{18}, \\ \int_0^1 x(1+x^2)^3 \lg(1-x^4) dx &= 2 \lg 2 - \frac{471}{144},\end{aligned}$$

u. s. w.

9)

$$\begin{aligned}\int_0^1 x(1-x^2) \lg(1-x^4) dx &= \lg 2 - \frac{3}{4}, \\ \int_0^1 x(1-x^2)^2 \lg(1-x^4) dx &= \frac{4 \lg 2}{3} - \frac{13}{18}, \\ \int_0^1 x(1-x^2)^3 \lg(1-x^4) dx &= 2 \lg 2 - \frac{67}{48},\end{aligned}$$

u. s. w.

erner erhält man aus Nr. 6) §. 5.:

12)

$$\int_0^1 x^{6m} \lg(1+x^3) dx = \frac{2\lg 2}{6m+1} + \frac{\pi}{(6m+1)\sqrt{3}} - \frac{3}{6m+1} \left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \dots + \frac{1}{6m+1}\right),$$

$$\int_0^1 x^{6m+1} \lg(1+x^3) dx = \frac{\pi}{(6m+2)\sqrt{3}} - \frac{3}{6m+2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{24} - \dots + \frac{1}{6m+2}\right),$$

$$\int_0^1 x^{6m+2} \lg(1+x^3) dx = \frac{2\lg 2}{6m+3} - \frac{1}{6m+3} \left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \dots + \frac{1}{2m+1}\right),$$

$$\int_0^1 x^{6m+3} \lg(1+x^3) dx = -\frac{\pi}{(6m+4)\sqrt{3}} + \frac{3}{6m+4} \left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \dots - \frac{1}{6m+4}\right),$$

$$\int_0^1 x^{6m+4} \lg(1+x^3) dx = \frac{2\lg 2}{6m+5} - \frac{\pi}{(6m+5)\sqrt{3}} + \frac{3}{6m+5} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{24} - \dots - \frac{1}{6m+5}\right),$$

$$\int_0^1 x^{6m+5} \lg(1+x^3) dx = \frac{1}{6m+6} \left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{64} - \dots - \frac{1}{2m+2}\right).$$

Hieraus ergeben sich folgende Integrale:

$$\int_0^1 \lg(1+x^3) dx = 2\lg 2 + \frac{\pi}{\sqrt{3}} - 3,$$

$$\int_0^1 x \lg(1+x^3) dx = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} - \frac{3}{4},$$

$$\int_0^1 x^2 \lg(1+x^3) dx = \frac{2\lg 2}{3} - \frac{1}{3},$$

$$\int_0^1 x^3 \lg(1+x^3) dx = -\frac{\pi}{4\sqrt{3}} + \frac{9}{16},$$

$$\int_0^1 x^4 \lg(1+x^3) dx = \frac{2\lg 2}{5} - \frac{\pi}{5\sqrt{3}} + \frac{9}{50},$$

$$\int_0^1 x^5 \lg(1+x^3) dx = \frac{1}{12},$$

$$\int_0^1 x^6 \lg(1+x^3) dx = \frac{2\lg 2}{7} + \frac{\pi}{7\sqrt{3}} - \frac{75}{196}.$$

6)

$$\int_0^1 \frac{\partial x}{1-x^3} = -\frac{1}{3}(\lg(x-1) - \frac{1}{3}\lg 3 - \frac{\pi}{2\sqrt{3}}),$$

$$\int_0^1 \frac{x \partial x}{1-x^3} = -\frac{1}{3}(\lg(x-1) - \frac{1}{3}\lg 3 + \frac{\pi}{2\sqrt{3}}).$$

Hierin wurde $\lg(x-1)$ vorerst belassen. Bemerkt man, daß

$$\lg(x-1) = \int \frac{\partial x}{x-1} = -\int \frac{\partial x}{1-x} = \lg(1-x),$$

so fallen die unendlich gross werdenden Werthe aus den stellungen weg und die Gleichungen Nr. 5) gehen in folgende

7)

$$\int_0^1 x^{2m} \lg(1-x^3) \partial x = \frac{1}{2(3m+1)}(\lg 3 + \frac{\pi}{\sqrt{3}}) - \frac{3}{3m+1}(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \dots \frac{1}{3m+1}),$$

$$\int_0^1 x^{2m+1} \lg(1-x^3) \partial x = \frac{1}{2(3m+2)}(\lg 3 - \frac{\pi}{\sqrt{3}}) - \frac{3}{3m+2}(\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \dots \frac{1}{3m+2}),$$

$$\int_0^1 x^{2m+2} \lg(1-x^3) \partial x = -\frac{1}{3m+3}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \frac{1}{m+1}).$$

Hieraus leiten sich folgende Integrale ab:

8)

$$\int_0^1 \lg(1-x^3) \partial x = \frac{1}{2}\lg 3 + \frac{\pi}{2\sqrt{3}} - 3,$$

$$\int_0^1 x \lg(1-x^3) \partial x = \frac{1}{4}\lg 3 - \frac{\pi}{4\sqrt{3}} - \frac{3}{4},$$

$$\int_0^1 x^2 \lg(1-x^3) \partial x = -\frac{1}{3},$$

$$\int_0^1 x^3 \lg(1-x^3) \partial x = \frac{\lg 3}{8} + \frac{\pi}{8\sqrt{3}} - \frac{15}{16},$$

$$\int_0^1 x^4 \lg(1-x^3) \partial x = \frac{\lg 3}{10} - \frac{\pi}{10\sqrt{3}} - \frac{21}{50},$$

$$\int_0^1 x^5 \lg(1-x^3) \partial x = -\frac{1}{4},$$

3)

$$\int_0^1 \frac{\partial x}{1+x^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\lg \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} + \pi \right),$$

$$\int_0^1 \frac{x \partial x}{1+x^4} = \frac{\pi}{8},$$

$$\int_0^1 \frac{x^2 \partial x}{1+x^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(-\lg \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} + \pi \right),$$

$$\int_0^1 \frac{x^3 \partial x}{1+x^4} = \frac{1}{4} \lg 2.$$

Hieran reihen sich folgende als Fortsetzung der Integrale in Nr. 3), wenn die Integrale in Nr. 1) zwischen den Grenzen von 0 und 1 genommen werden:

4)

$$\int_0^1 \frac{x^4 \partial x}{1+x^4} = -\frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\lg \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} + \pi \right) + 1,$$

$$\int_0^1 \frac{x^5 \partial x}{1+x^4} = -\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2},$$

$$\int_0^1 \frac{x^6 \partial x}{1+x^4} = -\frac{1}{4\sqrt{2}} \left(-\lg \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} + \pi \right) + \frac{1}{3},$$

$$\int_0^1 \frac{x^7 \partial x}{1+x^4} = -\frac{1}{4} \lg 2 + \frac{1}{4},$$

$$\int_0^1 \frac{x^8 \partial x}{1+x^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\lg \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} + \pi \right) - \frac{4}{5},$$

$$\int_0^1 \frac{x^9 \partial x}{1+x^4} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{3},$$

u. s. w.

Wird nun die Gleichung

5)

$$\int x^{m-1} \lg(1+x^4) \partial x = \frac{x^m \lg(1+x^4)}{m} - \frac{4}{m} \int \frac{x^{m+3}}{1+x^4} \partial x$$

oder, um die Entwicklung abzukürzen,

$$\int_0^1 \frac{x^{3m+2} \partial x}{1+x+x^2} = -\frac{1}{2} \lg(1+x+x^2) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{ArcTg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{ArcTg} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ + x + \frac{x^4}{4} + \frac{x^7}{7} + \dots \frac{x^{3m+1}}{3m+1} \\ - \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^9}{9} + \dots \frac{x^{3m}}{3m} \right).$$

Hieraus erhält man für die Grenzen zwischen 0 und 1 folgende Integrale:

4)

$$\int_0^1 \frac{x^{3m} \partial x}{1+x+x^2} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \dots \frac{1}{3m-1} - \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \dots \frac{1}{3m-2} \right),$$

$$\int_0^1 \frac{x^{3m+1} \partial x}{1+x+x^2} = \frac{1}{2} \lg 3 - \frac{\pi}{6\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \dots \frac{1}{m} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \dots \frac{1}{3m-1} \right),$$

$$\int_0^1 \frac{x^{3m+2} \partial x}{1+x+x^2} = -\frac{1}{2} \lg 3 - \frac{\pi}{6\sqrt{3}} + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \dots \frac{1}{3m+1} - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \dots \frac{1}{m} \right).$$

Hieraus leiten sich folgende Integrale ab:

5)

$$\int_0^1 \frac{\partial x}{1+x+x^2} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}},$$

$$\int_0^1 \frac{x \partial x}{1+x+x^2} = -\frac{1}{2} \lg 3 - \frac{\pi}{6\sqrt{3}},$$

$$\int_0^1 \frac{x^2 \partial x}{1+x+x^2} = -\frac{1}{2} \lg 3 - \frac{\pi}{6\sqrt{3}} + 1,$$

$$\int_0^1 \frac{x^3 \partial x}{1+x+x^2} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{2},$$

$$\int_0^1 \frac{x^4 \partial x}{1+x+x^2} = \frac{1}{2} \lg 3 - \frac{\pi}{6\sqrt{3}} - \frac{1}{6},$$

$$\int_0^1 \frac{x^5 \partial x}{1+x+x^2} = -\frac{1}{2} \lg 3 - \frac{\pi}{6\sqrt{3}} + \frac{11}{12},$$

$$\int_0^1 \frac{x^6 \partial x}{1+x+x^2} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} - \frac{11}{20},$$

u. s. w.

Benutzt man die Gleichung

$$\int x^{m-1} \lg(1+x+x^2) \partial x = \frac{x^m}{m} \lg(1+x+x^2) - \frac{1}{m} \int \frac{x^m \partial x}{1+x+x^2} \\ - \frac{2}{m} \int \frac{x^{m+1} \partial x}{1+x+x^2},$$

11)

$$\int_0^1 (1-x) \lg(1+x+x^2) dx = \frac{3}{4} \lg 3 + \frac{3\pi}{4\sqrt{3}} - 2,$$

$$\int_0^1 (1-x)^2 \lg(1+x+x^2) dx = \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{31}{18},$$

$$\int_0^1 (1-x)^3 \lg(1+x+x^2) dx = -\frac{9 \lg 3}{8} + \frac{9\pi}{8\sqrt{3}} - \frac{3}{4},$$

$$\int_0^1 (1-x)^4 \lg(1+x+x^2) dx = -\frac{27 \lg 3}{10} + \frac{9\pi}{10\sqrt{3}} + \frac{411}{300},$$

u. s. w.

§. 17.

In gleicher Weise lässt sich das Integral

$$\int x^{m-1} \lg(1-x+x^2) dx$$

darstellen. Man erhält durch Division:

1)

$$\frac{1}{1-x+x^2} = x^{-2} - x^{-5} + x^{-8} - x^{-11} \dots (-)^{r-1} x^{-3r+1} (-)^r \frac{x}{1-x} \\ + x^{-3} - x^{-6} + x^{-9} - x^{-12} \dots (-)^{r-1} x^{-3r},$$

und man hat in dieser Darstellung zwischen einem geraden ungeraden r zu unterscheiden. Es entstehen daher bei Entwicklung des vorstehenden Integrals sechs Formen, von denen zwei Reihen mit abwechselnden Zeichen umschliesst und von Integralen

$$\int \frac{\partial x}{1-x+x^2}, \quad \int \frac{x \partial x}{1-x+x^2}, \quad \int \frac{x^2 \partial x}{1-x+x^2}$$

begleitet ist, von welchen sich das letztere auf folgende Weise zerlegt:

$$\int \frac{x^2 \partial x}{1-x+x^2} = \int \partial x + \int \frac{x-1}{1-x+x^2} \partial x.$$

Werden die aus Nr. 1) sich ergebenden Reihen der Reihe mit $\int x^{6m} \partial x$, $\int x^{6m+1} \partial x$, $\int x^{6m+5} \partial x$ verbunden und zwischen den Grenzen 0 und x integriert, so ergeben sich folgende Formeln, die wir in abgekürzter Gestalt angeben:

2)

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{x^{6m} \partial x}{1-x+x^2} &= \int_0^x \frac{\partial x}{1-x+x^2} - \Sigma_1^{2m} (-)^{u-1} \frac{x^{3u-1}}{3u-1} - \Sigma_1^{2m} (-)^{u-1} \frac{x^{3u-2}}{3u-2}, \\ \int_0^x \frac{x^{6m+1} \partial x}{1-x+x^2} &= \int_0^x \frac{x \partial x}{1-x+x^2} - \Sigma_1^{2m} (-)^{u-1} \frac{x^{3u}}{3u} - \Sigma_1^{2m} (-)^{u-1} \frac{x^{3u-1}}{3u-1}, \\ \int_0^x \frac{x^{6m+2} \partial x}{1-x+x^2} &= \int_0^x \frac{(x-1) \partial x}{1-x+x^2} + \Sigma_0^{2m} (-)^u \frac{x^{3u+1}}{3u+1} - \Sigma_1^{2m} (-)^{u-1} \frac{x^{3u}}{3u}, \\ \int_0^x \frac{x^{6m+3} \partial x}{1-x+x^2} &= - \int_0^x \frac{\partial x}{1-x+x^2} + \Sigma_0^{2m} (-)^u \frac{x^{3u+2}}{3u+2} + \Sigma_0^{2m} (-)^u \frac{x^{3u+1}}{3u+1}, \\ \int_0^x \frac{x^{6m+4} \partial x}{1-x+x^2} &= - \int_0^x \frac{x \partial x}{1-x+x^2} + \Sigma_0^{2m} (-)^u \frac{x^{3u+3}}{3u+3} + \Sigma_0^{2m} (-)^u \frac{x^{3u+2}}{3u+2}, \\ \int_0^x \frac{x^{6m+5} \partial x}{1-x+x^2} &= - \int_0^x \frac{(x-1) \partial x}{1-x+x^2} - \Sigma_0^{2m+1} (-)^u \frac{x^{3u+1}}{3u+1} \\ &\quad + \Sigma_0^{2m} (-)^u \frac{x^{3u+3}}{3u+3}.\end{aligned}$$

Die begleitenden Integrale haben folgende Wërthe:

3)

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{\partial x}{1-x+x^2} &= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctg} \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ \int_0^x \frac{x \partial x}{1-x+x^2} &= \frac{1}{2} \lg(1-x+x^2) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctg} \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ \int_0^x \frac{x-1}{1-x+x^2} \partial x &= \frac{1}{2} \lg(1-x+x^2) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctg} \frac{1}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

Werden die Integrale in Nr. 2) zwischen den Grenzen von 0 und 1 genommen, so gehen sie mit Rücksicht auf Nr. 3) in folgende über:

4)

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^{6m} \partial x}{1-x+x^2} &= \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \dots - \frac{1}{6m-1}\right) - \left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} \dots - \frac{1}{6m-2}\right), \\ \int_0^1 \frac{x^{6m+1} \partial x}{1-x+x^2} &= \frac{\pi}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots - \frac{1}{2m}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \dots - \frac{1}{6m-1}\right), \\ \int_0^1 \frac{x^{6m+2} \partial x}{1-x+x^2} &= -\frac{\pi}{3\sqrt{3}} + 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} \dots + \frac{1}{6m+1} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots - \frac{1}{2m}\right), \\ \int_0^1 \frac{x^{6m+3} \partial x}{1-x+x^2} &= -\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \dots + \frac{1}{6m+2} + 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} \dots + \frac{1}{6m+1},\end{aligned}$$

$$\int_0^1 x^4 \lg(1-x+x^2) dx = -\frac{\pi}{5\sqrt{3}} + \frac{101}{300},$$

$$\int_0^1 x^5 \lg(1-x+x^2) dx = -\frac{7}{360},$$

$$\int_0^1 x^6 \lg(1-x+x^2) dx = \frac{\pi}{7\sqrt{3}} - \frac{403}{1470},$$

$$\int_0^1 x^7 \lg(1-x+x^2) dx = \frac{\pi}{8\sqrt{3}} - \frac{401}{1680},$$

u. s. w.

Ferner ergeben sich hieraus folgende Integrale:

9)

$$\int_0^1 (1+x) \lg(1-x+x^2) dx = \frac{3\pi}{2\sqrt{3}} - 3,$$

$$\int_0^1 (1+x)^2 \lg(1-x+x^2) dx = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} - \frac{73}{18},$$

$$\int_0^1 (1+x)^3 \lg(1-x+x^2) dx = \frac{9\pi}{4\sqrt{3}} - \frac{19}{4},$$

$$\int_0^1 (1+x)^4 \lg(1-x+x^2) dx = \frac{9\pi}{5\sqrt{3}} - \frac{1299}{300},$$

$$\int_0^1 (1+x)^5 \lg(1-x+x^2) dx = -\frac{69}{40},$$

u. s. w.

10)

$$\int_0^1 (1-x) \lg(1-x+x^2) dx = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} - 1,$$

$$\int_0^1 (1-x)^2 \lg(1-x+x^2) dx = -\frac{1}{18},$$

$$\int_0^1 (1-x)^3 \lg(1-x+x^2) dx = -\frac{\pi}{4\sqrt{3}} + \frac{5}{12},$$

$$\int_0^1 (1-x)^4 \lg(1-x+x^2) dx = -\frac{\pi}{5\sqrt{3}} + \frac{101}{300},$$

$$\int_0^1 (1-x)^5 \lg(1-x+x^2) dx = -\frac{7}{360},$$

u. s. w.

Merkwürdig ist der Zusammenhang, worin die Integrale N mit denen in Nr. 8) stehen.

s sich zur Bestimmung der Grössen p, q und p_1, q_1 die den Gleichungen ergeben:

$$\left\{ \begin{array}{l} p + p_1 = a, \\ q + pp_1 + q_1 = b, \\ qp_1 + pq_1 = c, \\ qq_1 = d. \end{array} \right.$$

us der zweiten und vierten dieser Gleichungen folgt

$$q + q_1 = b - pp_1, \quad 4qq_1 = 4d;$$

$$\begin{aligned} (q + q_1)^2 &= q^2 + 2qq_1 + q_1^2 = (b - pp_1)^2, \\ 4qq_1 &= 4d; \end{aligned}$$

h durch Subtraction:

$$(q - q_1)^2 = (b - pp_1)^2 - 4d,$$

ss man also die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} q + q_1 &= b - pp_1, \\ q - q_1 &= \pm \sqrt{(b - pp_1)^2 - 4d} \end{aligned}$$

aus denen sich:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2q = b - pp_1 \pm \sqrt{(b - pp_1)^2 - 4d}, \\ 2q_1 = b - pp_1 \mp \sqrt{(b - pp_1)^2 - 4d} \end{array} \right.$$

st.

nach der dritten der vier Gleichungen 2) ist nun ferner:

$$2c = 2qp_1 + 2pq_1,$$

nach 3):

$$\begin{aligned} 2c &= (b - pp_1)p_1 \pm p_1 \sqrt{(b - pp_1)^2 - 4d} \\ &\quad + (b - pp_1)p \mp p \sqrt{(b - pp_1)^2 - 4d}, \end{aligned}$$

is sich:

$$2c = (b - pp_1)(p + p_1) \mp (p - p_1) \sqrt{(b - pp_1)^2 - 4d},$$

nach der ersten der vier Gleichungen 2):

$$2c = a(b - pp_1) \mp (p - p_1) \sqrt{(b - pp_1)^2 - 4d}$$

[13]

$$\cos \frac{1}{2}(s_1 - c_1) = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}s_2 \cos \frac{1}{2}(s_2 - a_2) \cos \frac{1}{2}(s_2 - b_2) \sin \frac{1}{2}(s_2 - c_2)}{\sin \frac{1}{2}a_2 \sin \frac{1}{2}b_2 \cos \frac{1}{2}c_2}},$$

$$[14] \quad \tan \frac{1}{2}(s_1 - c_1) = \sqrt{\frac{\tan \frac{1}{2}(s_2 - a_2) \tan \frac{1}{2}(s_2 - b_2)}{\tan \frac{1}{2}s_2 \tan \frac{1}{2}(s_2 - c_2)}}.$$

Aus [14] folgt sodann:

$$[15] \quad \tan \frac{1}{2}(s_1 - a_1) \tan \frac{1}{2}(s_1 - b_1) = \tan \frac{1}{2}(s_2 - c_2) \cot \frac{1}{2}s_2,$$

$$[16] \quad \tan \frac{1}{2}(s_1 - a_1) \cot \frac{1}{2}(s_1 - b_1) = \cot \frac{1}{2}(s_2 - a_2) \tan \frac{1}{2}(s_2 - b_2),$$

$$[17] \quad \begin{aligned} & \tan \frac{1}{2}(s_1 - a_1) \tan \frac{1}{2}(s_2 - a_2) \\ &= \tan \frac{1}{2}(s_1 - b_1) \tan \frac{1}{2}(s_2 - b_2) = \tan \frac{1}{2}(s_1 - c_1) \tan \frac{1}{2}(s_2 - c_2) \\ &= \cot \frac{1}{2}s_1 \cot \frac{1}{2}s_2, \end{aligned}$$

$$[18] \quad \tan \frac{1}{2}s_1 \tan \frac{1}{2}(s_1 - c_1) = \cot \frac{1}{2}s_2 \cot \frac{1}{2}(s_2 - c_2).$$

Eine Verbindung der Formeln [7] unter einander durch Division liefert aber auch noch folgende Resultate:

$$[19] \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\tan \frac{1}{2}s_1}{\tan \frac{1}{2}c_1} &= \frac{\cos \frac{1}{2}(s_2 - a_2) \cos \frac{1}{2}(s_2 - b_2)}{\sin \frac{1}{2}s_2 \sin \frac{1}{2}(s_2 - c_2)}, \\ \frac{\tan \frac{1}{2}s_1}{\cot \frac{1}{2}c_1} &= \frac{\cos \frac{1}{2}s_2 \cos \frac{1}{2}(s_2 - c_2)}{\sin \frac{1}{2}(s_2 - a_2) \sin \frac{1}{2}(s_2 - b_2)}, \\ \frac{\tan \frac{1}{2}(s_1 - c_1)}{\tan \frac{1}{2}c_1} &= \frac{\sin \frac{1}{2}(s_2 - a_2) \sin \frac{1}{2}(s_2 - b_2)}{\sin \frac{1}{2}s_2 \sin \frac{1}{2}(s_2 - c_2)}, \\ \frac{\tan \frac{1}{2}(s_1 - c_1)}{\cot \frac{1}{2}c_1} &= \frac{\cos \frac{1}{2}s_2 \cos \frac{1}{2}(s_2 - c_2)}{\cos \frac{1}{2}(s_2 - a_2) \cos \frac{1}{2}(s_2 - b_2)}; \end{aligned} \right.$$

von welchen eine Rückkehr zu früheren Formeln, namentlich zu der dritten Formel in [2] und zu [14] leicht möglich ist.

XVI.

Bemerkung zu Schlömilch's Auflösung der biquadratischen Gleichungen *).

Von

Herrn Dr. G. F. Meyer
in Hannover.

1.

Heisst die aufzulösende Gleichung des vierten Grades

$$1. \quad x^4 + ax^2 + bx + c = 0,$$

so kann man diese nach Schlömilch in eine reciproke von der Form

$$2. \quad y^4 + \alpha y^3 + \beta y^2 + \alpha y + 1 = 0$$

verwandeln, indem man statt x schreibt:

$$3. \quad x = qy + \frac{b}{2s}.$$

Die Coefficienten α und β werden dabei definirt durch die Gleichungen:

$$4. \quad \alpha = \frac{4b}{2qs}, \quad \beta = \frac{6b^2 + 4as^2}{(2qs)^2};$$

und für die Grössen q und s erhält man die Beziehungen:

5.

$$q = \sqrt[4]{\left(\frac{b}{2s}\right)^4 + a\left(\frac{b}{2s}\right)^2 + b\frac{b}{2s} + c} = \frac{1}{2s} \sqrt[4]{b^4 + 4ab^2s^2 + 8b^2s^3 + c(2s)^4}$$

*) Siehe Zeitschrift für Mathem. und Physik von Schlömilch, Cantor und Witzschel. Jahrg. 6. Heft 1. S. 50-

XIX.**Ueber bestimmte Integrale.**

(Fortsetzung von Thl. XXXIX, Nr. IX.)

Von

Herrn Dr. L. Oettinger,Grossherzoglich Badischen Hofrath und ordentlichen Professor der
Mathematik an der Universität zu Freiburg i. B.**II.****§. 19.**

In §. 5. wurde folgendes Integral entwickelt:

1)

$$\int_0^1 x^{m-1} (\lg x)^r dx = (-)^r \cdot \frac{1 \cdot r!}{m^{r+1}} = (-)^r \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r}{m^{r+1}},$$

das man auch in folgende Form umsetzen kann:

2)

$$\int_0^1 x^{m-1} \left(\lg \frac{1}{x}\right)^r dx = \frac{1 \cdot r!}{m^{r+1}}.$$

Dort wurde bemerkt, dass m eine positive, ganze und gebrochene, r aber nur eine positive ganze Zahl sein kann.

Diese Integrale wurden vielfach und namentlich von Euler und Legendre, von letzterem unter der Benennung „Euler'sches Integral zweiter Art“, untersucht. Sie lassen Betrachtungen zu, die bisher nicht hervorgehoben wurden. Sie sollen hier in Kürze nachgetragen werden.

Beide Integrale gelten auch, wenn r eine gebrochene, positive und negative Zahl bedeutet. Diess zeigt sich durch Umformung des bekannten Integrals

$$\int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x^q} dx = \frac{1^{\frac{p}{q}+1}}{p}.$$

Setzt man nämlich:

3)

$$e^{-x^q} = y,$$

also $x^q = -\lg y$, so wird

$$x = (-\lg y)^{\frac{1}{q}} \quad \text{und} \quad dx = -\frac{1}{q} (-\lg y)^{\frac{1}{q}-1} \frac{dy}{y}.$$

Durch Einführung dieser Werthe in das vorstehende Integral erhält man:

4)

$$-\frac{1}{q} \int (-\lg y)^{\frac{p}{q}-1} dy.$$

Die Grenzen, zwischen welchen dieses Integral genommen werden muss, bestimmen sich auf folgende Weise. Für x wird $e^{-x^q} = 0$. In diesem Falle ist auch $y = 0$. Wird $x = 0$ gesetzt, so ist $e^{-x^q} = 1$ und in diesem Falle muss $y = 1$ sein. Das umgeformte Integral Nr. 4) muss daher zwischen den Grenzen 1 und 0 genommen werden. Hiernach erhält man

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x^q} dx &= -\frac{1}{q} \int_1^0 (-\lg y)^{\frac{p}{q}-1} dy = \frac{1}{q} \int_0^1 (-\lg y)^{\frac{p}{q}} dy \\ &= \frac{1^{\frac{p}{q}+1}}{p}. \end{aligned}$$

Setzt man hierin $p+q$ statt p , so entsteht nach den nöthigen Reductionen:

$$\int_0^1 (-\lg y)^{\frac{p}{q}} dy = \frac{q}{p+q} 1^{\frac{p}{q}+1+1} = 1^{\frac{p}{q}+1},$$

oder

5)

$$\int_0^1 (\lg y)^{\frac{p}{q}} dy = (-)^{\frac{p}{q}} 1^{\frac{p}{q}+1},$$

es auch in folgende Form umgesetzt werden kann:

$$6) \quad \int_0^1 (\lg \frac{1}{y})^{\frac{p}{q}} dy = 1^{\frac{p}{q}+1}.$$

Setzt man nun das Integral

$$\int_0^\infty ax^{-1} b^{-x} dx = \frac{1^{\frac{p}{q}+1}}{p}$$

in die gleiche Weise um, so erhält man:

$$7) \quad \int_0^1 (\lg y)^{\frac{p}{q}} dy = (-)^{\frac{p}{q}} \cdot 1^{\frac{p}{q}+1}.$$

8)

$$\int_0^1 (\lg \frac{1}{y})^{\frac{p}{q}} dy = 1^{\frac{p}{q}+1}.$$

Da p und q unabhängig von einander sind, so kann $\frac{p}{q}$ jede ganze und gebrochene positive, $\frac{p}{q}$ aber nur eine negative gebrochene Zahl bedeuten, denn für eine ganze negative Zahl wird Nr. 7) und 8), also auch Nr. 1) und 2), unendlich gross. In diesem Sinne sollen die obigen Integrale hier in Kürze betrachtet werden.

§. 20.

Wir wählen hierzu das Integral Nr. 2) §. 19., weil hierbei das Zeichen nicht zu beachten ist. Die sich ergebenden Resultate sind reell, während die aus Nr. 1) sich ergebenden in bestimmten Fällen auf imaginäre Werthe führen.

Setzt man $r + \frac{p}{q}$ in Nr. 2) §. 19., so erhält man folgende allgemeine Form:

$$\int_0^1 x^{m-1} \left(\lg \frac{1}{x}\right)^{r+\frac{n}{q}} dx = \frac{1^{r+\frac{n}{q}+1}}{m^{r+1+\frac{n}{q}}} = \frac{1^{\frac{n}{q}+1} \left(1+\frac{n}{q}\right)^{r+1}}{m^{r+1} \sqrt[q]{m^n}}$$

$$= \frac{(q+n)^{r+1} \cdot 1^{\frac{n}{q}+1}}{q^r \cdot m^{r+1} \sqrt[q]{m^n}} = \frac{(n+q)(n+2q) \dots (n+rq) \cdot 1^{\frac{n}{q}+1}}{q^r \cdot m^{r+1} \sqrt[q]{m^n}}$$

worin alle hierher gehörige Integrale enthalten sind. Ist $\frac{n}{q} = \frac{1}{2}$ so ist $1^{\frac{n}{q}+1} = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$, und man erhält:

$$\int_0^1 x^{m-1} \left(\lg \frac{1}{x}\right)^{r+\frac{1}{2}} dx = \frac{1^{r+\frac{1}{2}+1} \sqrt{\pi}}{(2m)^{r+1} \sqrt{m}} = \frac{1.3.5 \dots (2r+1) \sqrt{\pi}}{(2m)^{r+1} \sqrt{m}}$$

Für $m=1$ entsteht:

3)

$$\int_0^1 \sqrt{\lg \frac{1}{x}} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi},$$

$$\int_0^1 \lg \frac{1}{x} \sqrt{\lg \frac{1}{x}} dx = \frac{3\sqrt{\pi}}{4},$$

$$\int_0^1 \left(\lg \frac{1}{x}\right)^2 \sqrt{\lg \frac{1}{x}} dx = \frac{15\sqrt{\pi}}{8},$$

$$\int_0^1 \left(\lg \frac{1}{x}\right)^r \sqrt{\lg \frac{1}{x}} dx = \frac{1^{r+1+\frac{1}{2}}}{2^{r+1}} \sqrt{\pi} = \frac{1.3.5 \dots (2r+1) \sqrt{\pi}}{2^{r+1}}.$$

Hiermit sind die Resultate zu vergleichen, welche Euler in der Integralrechnung Bd. IV. S. 91. mitgetheilt hat.

Setzt man $\frac{n}{q} = \frac{1}{3}$, so erhält man aus Nr. 1):

4)

$$\int_0^1 x^{m-1} \left(\lg \frac{1}{x}\right)^{r+\frac{1}{3}} dx = \frac{4^{r+1+\frac{1}{3}} \cdot 1^{\frac{1}{3}+1}}{3^r \cdot m^{r+1} \sqrt[3]{m}} = \frac{4.7.10 \dots (3r+1) \cdot 1^{\frac{1}{3}+1}}{3^r \cdot m^{r+1} \sqrt[3]{m}}$$

Hieraus erhält man für $m \neq 1$ folgende Integrale:

5)

$$\int_0^1 \sqrt[3]{\lg \frac{1}{x}} dx = \frac{1}{3} \frac{1}{1+1},$$

$$\int_0^1 \lg \frac{1}{x} \sqrt[3]{\lg \frac{1}{x}} dx = \frac{1}{4} \frac{1}{1+1},$$

$$\int_0^1 \left(\lg \frac{1}{x}\right)^2 \sqrt[3]{\lg \frac{1}{x}} dx = \frac{28}{9} \frac{1}{1+1},$$

$$\int_0^1 \left(\lg \frac{1}{x}\right)^r \sqrt[3]{\lg \frac{1}{x}} dx = \frac{1^{r+1} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+1}}{3^{r+1}} = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3r+1) \cdot \frac{1}{3}}{3^{r+1}}.$$

Eben so einfach ergeben sich die besondern Fälle für das Integral Nr. 4), wenn man m in die Darstellung mit den entsprechenden Werthen aufnimmt. Hierin ist

$$\frac{1}{1+1} = 0,8929795116 \text{ und } \lg \frac{1}{1+1} = 0,9508414945945 - 1,$$

$\frac{n}{q} = \frac{2}{3}$ erhält man:

6)

$$\int_0^1 x^{m-1} \left(\lg \frac{1}{x}\right)^{r+1} dx = \frac{5^{r+1} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+1}}{3^r \cdot m^{r+1} \sqrt[3]{m^2}} = \frac{5 \cdot 8 \cdot 11 \dots (3r+2) \cdot \frac{1}{3}}{3^r \cdot m^{r+1} \sqrt[3]{m^2}}.$$

besondern Fälle leiten sich hieraus leicht ab. In dieser Darstellung ist

$$\frac{1}{1+1} = 0,9027452928, \quad \lg \frac{1}{1+1} = 0,95556523262835 - 1.$$

Ist man $\frac{n}{q}$ negativ in Nr. 1), so ergibt sich:

7)

$$\int_0^1 x^{m-1} \left(\lg \frac{1}{x}\right)^{r-\frac{n}{q}} dx = \frac{(q-n)^{r+1} \cdot \sqrt[q]{m^n} \cdot 1^{-\frac{n}{q}}}{q^r \cdot m^{r+1}}.$$

11)

$$\int_0^1 \frac{x^{m-1} \partial x}{\left(\lg \frac{1}{x}\right)^{r+\frac{n}{q}}}$$

$$r \cdot \frac{(mq)^r \cdot \sqrt[q]{m^n} \cdot 1^{-\frac{n}{q}}}{m \cdot n^{r+q}} = (-)^r \cdot \frac{(mq)^r \cdot \sqrt[q]{m^n} \cdot 1^{-\frac{n}{q}}}{m \cdot n(n+q) \dots (n+rq-q)}.$$

se Darstellung gibt eine reiche Ausbeute für die Anwen-

Setzt man $\frac{n}{q} = \frac{1}{2}$, so erhält man

12)

$$\frac{x^{m-1} \partial x}{\left(\lg \frac{1}{x}\right)^{r+\frac{1}{2}}} = (-)^r \cdot \frac{(2m)^r \cdot \sqrt{m\pi}}{m \cdot 1^{r+2}} = (-)^r \cdot \frac{(2m)^r \cdot \sqrt{m\pi}}{m \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2r-1)}.$$

= 1 erhält man folgende Integrale:

13)

$$\int_0^1 \frac{\partial x}{\sqrt{\lg \frac{1}{x}}} = \sqrt{\pi},$$

$$\int_0^1 \frac{\partial x}{\lg \frac{1}{x} \sqrt{\lg \frac{1}{x}}} = -2\sqrt{\pi},$$

$$\int_0^1 \frac{\partial x}{\left(\lg \frac{1}{x}\right)^2 \sqrt{\lg \frac{1}{x}}} = \frac{1}{3}\sqrt{\pi},$$

$$\int_0^1 \frac{\partial x}{\left(\lg \frac{1}{x}\right)^3 \sqrt{\lg \frac{1}{x}}} = -\frac{8}{15}\sqrt{\pi},$$

.....

$$\int_0^1 \frac{\partial x}{\left(\lg \frac{1}{x}\right)^r \sqrt{\lg \frac{1}{x}}} = (-)^r \cdot \frac{2^r \sqrt{\pi}}{1^{r+2}}.$$

erhält man:

14)

$$\int_0^1 \frac{x^{m-1} dx}{(\lg \frac{1}{x})^{r+1}} = (-)^r \cdot \frac{(3m)^r \sqrt[m]{m \cdot 1-1|1}}{m \cdot 1 \cdot 3} = (-)^r \cdot \frac{(3m)^r \sqrt[m]{m \cdot 1-1|1}}{m \cdot 1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3r-2)},$$

15)

$$\int_0^1 \frac{x^{m-1} dx}{(\lg \frac{1}{x})^{r+1}} = (-)^r \cdot \frac{(3m)^r \sqrt[m]{m^2 \cdot 1-1|1}}{m \cdot 2 \cdot 3} = (-)^r \cdot \frac{(3m)^r \sqrt[m]{m^2 \cdot 1-1|1}}{m \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3r-1)}$$

u. s. w.

Hieraus gewinnt man leicht eine Menge besonderer Fälle, die man mit den von Euler und andern aufgefundenen vergleichen kann.

Setzt man, da auch m eine gebrochene Zahl sein kann, $m + \frac{k}{p}$ statt m , so erhält man aus Nr. 2) §. 19.:

16)

$$\int_0^1 x^{m+\frac{k}{p}-1} (\lg \frac{1}{x})^r dx = \frac{p^{r+1} \cdot 1 \cdot 1}{(mp+k)^{r+1}}.$$

Ebenso erhält man aus Nr. 1), 7) und 11):

17)

$$\int_0^1 x^{m+\frac{k}{p}-1} (\lg \frac{1}{x})^{r+\frac{n}{q}} dx = \frac{p^{r+1+\frac{n}{q}} \cdot (q+n)^{r+q} \cdot 1^{\frac{n}{q}|1}}{q^r (pm+k)^{r+1+\frac{n}{q}}},$$

18)

$$\int_0^1 x^{m+\frac{k}{p}-1} (\lg \frac{1}{x})^{r-\frac{n}{q}} dx = \frac{p^{r+1-\frac{n}{q}} \cdot (q-n)^{r+q} \cdot 1^{-\frac{n}{q}|1}}{q^r (pm+k)^{r+1-\frac{n}{q}}},$$

19)

$$\int_0^1 \frac{x^{m+\frac{k}{p}-1}}{(\lg \frac{1}{x})^{1+\frac{n}{q}}} dx = (-)^r \cdot \frac{q^r (mp+k)^{r-1+\frac{n}{q}} \cdot 1^{-\frac{n}{q}|1}}{p^{r-1+\frac{n}{q}} \cdot n^{r+q}},$$

Hieraus lässt sich eine Menge besonderer Integrale ableiten.

Setzt man $\frac{k}{p} = \frac{1}{2}$, $\frac{k}{q} = \frac{1}{2}$, und für m und r allmählig die Werthe 0, 1, 2.... in Nr. 17), so entsteht:

20)

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{\lg \frac{1}{x}}}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{2\pi},$$

$$\int_0^1 \frac{x \lg \frac{1}{x} \sqrt{\lg \frac{1}{x}}}{\sqrt{x}} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{3\sqrt{3}},$$

$$\int_0^1 \frac{x^2 (\lg \frac{1}{x})^2 \sqrt{\lg \frac{1}{x}}}{\sqrt{x}} dx = \frac{3\sqrt{2\pi}}{25\sqrt{5}},$$

$$\int_0^1 \frac{x^3 (\lg \frac{1}{x})^3 \sqrt{\lg \frac{1}{x}}}{\sqrt{x}} dx = \frac{15\sqrt{2\pi}}{243\sqrt{7}},$$

$$\int_0^1 \frac{x^m (\lg \frac{1}{x})^r \sqrt{\lg \frac{1}{x}}}{\sqrt{x}} dx = \frac{1^{r+1} \cdot \sqrt{2\pi}}{(2m+1)^{r+1} \sqrt{2m+1}} = \frac{1.3.5 \dots (2r+1) \sqrt{2\pi}}{(2m+1)^{r+1} \sqrt{2m+1}},$$

u. s. w. Diese Integrale lassen sich beliebig vermehren.

§. 21.

Eine ausgedehnte Gruppe von Integralen gewinnt man durch Verbindung der in §. 19. angegebenen Ausdrücke mit dem Binomium $(1 \mp x^q)^n$. Man erhält:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 x^{p-1} (1-x^q)^n (\lg x)^r dx \\ &= \int_0^1 (x^{p-1} (\lg x)^r - n x^{p+q-1} (\lg x)^r + (n)_2 x^{p+2q-1} (\lg x)^r - \dots) dx. \end{aligned}$$

Werden die einzelnen Glieder nach Nr. 1) §. 19. integrirt, so entsteht:

1)

$$\int_0^1 x^{p-1} (1 - x^q)^n (\lg x)^r dx$$

$$= (-)^r \cdot \Gamma(r+1) \left(\frac{1}{p^{r+1}} - n \frac{1}{(p+q)^{r+1}} + \frac{(n)_2}{(p+2q)^{r+1}} - \frac{(n)_3}{(p+3q)^{r+1}} + \dots \right)$$

$$= (-)^r \cdot \Gamma(r+1) \cdot \Sigma_0^n (-)^u \cdot \frac{(n)_u}{(p+uq)^{r+1}},$$

worin

$$(n)_u = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-u+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots u}$$

bedeutet. Die Glieder der eingeschlossenen Reihe bilden den n ten Unterschied von $\frac{1}{p^{r+1}}$, jedoch in umgekehrter Ordnung. Man kann daher dieses Integral auch so darstellen:

2)

$$\int_0^1 x^{p-1} (1 - x^q)^n (\lg x)^r dx = (-)^{r+n} \cdot \Gamma(r+1) \cdot \Delta^n \frac{1}{p^{r+1}},$$

bei der Zunahme q . Auf gleiche Weise erhält man:

3)

$$\int_0^1 x^{p-1} (1 + x^q)^n (\lg x)^r dx$$

$$= (-)^r \cdot \Gamma(r+1) \left(\frac{1}{p^{r+1}} + \frac{n}{(p+q)^{r+1}} + \frac{(n)_2}{(p+2q)^{r+1}} + \dots \right)$$

$$= (-)^r \cdot \Gamma(r+1) \cdot \Sigma_0^n \cdot \frac{(n)_u}{(p+uq)^{r+1}} = (-)^r \cdot \Gamma(r+1) \cdot \zeta \frac{1}{p^{r+1}}.$$

Denn die Glieder der eingeschlossenen Reihe bilden die n te Aufstufung von $\frac{1}{p^{r+1}}$ bei der Zunahme q . Man kann auf beide Darstellungen die Gesetze anwenden, welche von dem n ten Unterschied oder der n ten Aufstufung gelten und daraus eine Menge besonderer Integrale ableiten. Sie werden jedoch nicht Gegenstand unserer Untersuchung sein.

Setzt man $-n$ statt n in Nr. 1) und 3), so entsteht:

Hieraus leitet sich folgendes Gesetz ab:

(12)

$$S(p, p)^{r+1} = \frac{1}{p^{r+1}} S(1, 1)^{r+1},$$

$$S'(p, p)^{r+1} = \frac{1}{p^{r+1}} S'(1, 1)^{r+1}.$$

Ueberhaupt erhält man, wenn p und q einen gemeinschaftlichen Faktor haben, was häufig vorkommt, folgende Reductionsformeln:

(13)

$$S(kp, kq)^{r+1} = \frac{1}{k^{r+1}} S(p, q)^{r+1},$$

$$S'(kp, kq)^{r+1} = \frac{1}{k^{r+1}} S'(p, q)^{r+1}.$$

Ferner ergeben sich aus Nr. 8) und 9) folgende Ableitungen, die im Folgenden viele Anwendung finden werden, wenn $p=1$ und $q=1, 2, 3, \dots$ gesetzt wird:

(14)

$$\int_0^1 \frac{(\lg x)^r}{1-x} dx = (-)^r \cdot 1^{r+1} S(1, 1)^{r+1},$$

$$\int_0^1 \frac{(\lg x)^r}{1-x^2} dx = (-)^r \cdot 1^{r+1} S(1, 2)^{r+1},$$

$$\int_0^1 \frac{(\lg x)^r}{1-x^3} dx = (-)^r \cdot 1^{r+1} S(1, 3)^{r+1},$$

u. s. w.

(15)

$$\int_0^1 \frac{(\lg x)^r}{1+x} dx = (-)^r \cdot 1^{r+1} S'(1, 1)^{r+1},$$

$$\int_0^1 \frac{(\lg x)^r}{1+x^2} dx = (-)^r \cdot 1^{r+1} S'(1, 2)^{r+1},$$

$$\int_0^1 \frac{(\lg x)^r}{1+x^3} dx = (-)^r \cdot 1^{r+1} S'(1, 3)^{r+1},$$

u. s. w.

Unterscheidet man aber, was hier eintritt, zwischen einer geraden und ungeraden Zahl, so ergeben sich folgende zwei Darstellungen:

3)

$$\int_0^1 \frac{x^{2mp+p-1}(\lg x)^r}{1+x^p} dx = (-)^r \cdot \frac{1^{r+1}}{p^{r+1}} S'(1,1)^{r+1}$$

$$(-)^{r+1} \cdot \frac{1^{r+1}}{p^{r+1}} \left(1 - \frac{1}{2^{r+1}} + \frac{1}{3^{r+1}} - \frac{1}{4^{r+1}} \cdots - \frac{1}{(2m)^{r+1}}\right),$$

4)

$$\int_0^1 \frac{x^{2mp+2p-1}(\lg x)^r}{1+x^p} dx = (-)^{r+1} \cdot \frac{1^{r+1}}{p^{r+1}} S'(1,1)^{r+1}$$

$$(-)^r \cdot \frac{1^{r+1}}{p^{r+1}} \left(1 - \frac{1}{2^{r+1}} + \frac{1}{3^{r+1}} - \frac{1}{4^{r+1}} \cdots + \frac{1}{(2m+1)^{r+1}}\right).$$

Eine andere Form von Reihen bekommt man, wenn $2p$ statt q und $2mp+p$ statt p in Nr. 8) und 9) §. 21. gesetzt wird. Auch in diesem Falle lässt sich p aus der Reihe ausscheiden, und es entsteht:

5)

$$\int_0^1 \frac{x^{2mp+p-1}(\lg x)^r}{1-x^{2p}} dx$$

$$= (-)^r \cdot \frac{1^{r+1}}{p^{r+1}} \left(\frac{1}{(2m+1)^{r+1}} + \frac{1}{(2m+3)^{r+1}} + \frac{1}{(2m+5)^{r+1}} + \cdots \right)$$

$$= (-)^r \cdot \frac{1^{r+1}}{p^{r+1}} S(1,2)^{r+1} (-)^{r+1} \cdot \frac{1^{r+1}}{p^{r+1}} \left(1 + \frac{1}{3^{r+1}} + \frac{1}{5^{r+1}} + \cdots \frac{1}{(2m-1)^{r+1}}\right),$$

6)

$$\int_0^1 \frac{x^{2mp+p-1}(\lg x)^r}{1+x^{2p}} dx$$

$$= (-)^r \cdot \frac{1^{r+1}}{p^{r+1}} \left(\frac{1}{(2m+1)^{r+1}} - \frac{1}{(2m+3)^{r+1}} + \frac{1}{(2m+5)^{r+1}} - \cdots \right)$$

$$= (-)^{m+r} \cdot \frac{1^{r+1}}{p^{r+1}} S'(1,2)^{r+1} (-)^{m+r+1} \cdot \frac{1^{r+1}}{p^{r+1}} \left(1 - \frac{1}{3^{r+1}} + \frac{1}{5^{r+1}} \cdots \right.$$

$$\left. \cdots (-)^{m-1} \cdot \frac{1}{(2m-1)^{r+1}}\right).$$

Diese Art von Reihen lässt sich in eine allgemeine Form bringen, wenn man kp statt q und $mkp + p$ statt p schreibt:

7)

$$\int_0^1 \frac{x^{mkp+p-1}(\lg x)^r}{1-x^{kp}} dx$$

$$= (-)^r \cdot \frac{1^{r+1}}{p^{r+1}} \left[\frac{1}{(mk+1)^{r+1}} + \frac{1}{(mk+k+1)^{r+1}} + \frac{1}{(mk+2k+1)^{r+1}} + \dots \right]$$

$$= (-)^r \cdot \frac{1^{r+1}}{p^{r+1}} S(mk+1, k)^{r+1},$$

8)

$$\int_0^1 \frac{x^{mkp+p-1}(\lg x)^r}{1+x^{kp}} dx$$

$$= (-)^r \cdot \frac{1^{r+1}}{p^{r+1}} \left[\frac{1}{(mk+1)^{r+1}} - \frac{1}{(mk+k+1)^{r+1}} + \dots \right]$$

$$= (-)^r \cdot \frac{1^{r+1}}{p^{r+1}} S'(mk+1, k)^{r+1}.$$

Auch hier lassen sich die Anfangsglieder ergänzen und man erhält:

9)

$$\int_0^1 \frac{x^{mkp+p-1}(\lg x)^r}{1-x^{kp}} dx = (-)^r \cdot \frac{1^{r+1}}{p^{r+1}} S(1, k)^{r+1}$$

$$(-)^{r+1} \cdot \frac{1^{r+1}}{p^{r+1}} \left[1 + \frac{1}{(k+1)^{r+1}} + \frac{1}{(2k+1)^{r+1}} + \dots \frac{1}{((m-1)k+1)^{r+1}} \right],$$

10)

$$\int_0^1 \frac{x^{mkp+p-1}(\lg x)^r}{1+x^{kp}} dx = (-)^{m+r} \cdot \frac{1^{r+1}}{p^{r+1}} S'(1, k)^{r+1}$$

$$(-)^{m+r+1} \cdot \frac{1^{r+1}}{p^{r+1}} \left[1 - \frac{1}{(k+1)^{r+1}} + \frac{1}{(2k+1)^{r+1}} - \dots (-)^{m-1} \frac{1}{(mk-k+1)^{r+1}} \right].$$

Diese Gleichungen werden später zu mancherlei Anwendungen dienen.

§. 23.

Die Auswerthung der hier in Frage stehenden Integrale be-

3)

$$\frac{\partial^2 M}{(\partial m)^2} = 1.2 S(m, k)^3 - 1.2 S(k-m, k)^3 = \frac{2 \cdot \pi^3}{k^3} \frac{\cos \frac{m\pi}{k}}{(\sin \frac{m\pi}{k})^3},$$

4)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 M}{(\partial m)^3} &= -1.2.3 S(m, k)^4 - 1.2.3 S(k-m, k)^4 \\ &= -\frac{\pi^4}{k^4} \left[\frac{6}{(\sin \frac{m\pi}{k})^4} - \frac{4}{(\sin \frac{m\pi}{k})^3} \right], \end{aligned}$$

5)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 M}{(\partial m)^4} &= 1^4.1 S(m, k)^5 - 1^4.1 S(k-m, k)^5 \\ &= \frac{\pi^5}{k^5} \left[\frac{24 \cdot \cos \frac{m\pi}{k}}{(\sin \frac{m\pi}{k})^5} - \frac{8 \cos \frac{m\pi}{k}}{(\sin \frac{m\pi}{k})^4} \right], \end{aligned}$$

6)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^5 M}{(\partial m)^5} &= -1^5.1 S(m, k)^6 - 1^5.1 S(k-m, k)^6 \\ &= -\frac{\pi^6}{k^6} \left[\frac{120}{(\sin \frac{m\pi}{k})^6} - \frac{120}{(\sin \frac{m\pi}{k})^4} + \frac{16}{(\sin \frac{m\pi}{k})^3} \right], \end{aligned}$$

7)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^6 M}{(\partial m)^6} &= 1^6.1 S(m, k)^7 - 1^6.1 S(k-m, k)^7 \\ &= \frac{\pi^7}{k^7} \left[\frac{720 \cos \frac{m\pi}{k}}{(\sin \frac{m\pi}{k})^7} - \frac{480 \cos \frac{m\pi}{k}}{(\sin \frac{m\pi}{k})^5} + \frac{32 \cos \frac{m\pi}{k}}{(\sin \frac{m\pi}{k})^3} \right], \end{aligned}$$

8)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^7 M}{(\partial m)^7} &= -1^7.1 S(m, k)^8 - 1^7.1 S(k-m, k)^8 \\ &= -\frac{\pi^8}{k^8} \left[\frac{5040}{(\sin \frac{m\pi}{k})^8} - \frac{6720}{(\sin \frac{m\pi}{k})^6} + \frac{2016}{(\sin \frac{m\pi}{k})^4} - \frac{64}{(\sin \frac{m\pi}{k})^2} \right], \end{aligned}$$

14)

$$S(1, 1)^2 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6},$$

$$S(1, 1)^4 = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots = \frac{\pi^4}{90},$$

$$S(1, 1)^6 = 1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \dots = \frac{\pi^6}{945},$$

$$S(1, 1)^8 = 1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \dots = \frac{\pi^8}{9450},$$

u. s. w.

§. 26.

Bei Untersuchung der reciproken Reihen mit abwechselnden Zeichen hat man zwischen einer geraden und ungeraden Zunahme zu unterscheiden und die Bemerkung festzuhalten, dass alle Glieder, welche gerade Zahlen in der Reihe $S'(1, 1)^p$ führen, das negative, und die, welche ungerade führen, das positive Zeichen haben. Für die Zunahme 2 hat man daher folgende Zerlegung:

$$\begin{aligned} S'(1, 1)^p &= 1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} - \dots \\ &= 1 + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{7^p} + \dots - \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{6^p} + \dots \right), \end{aligned}$$

woraus sich folgende Gleichung ableitet:

1)

$$S'(1, 1)^p = S(1, 2)^p - \frac{1}{2^p} S(1, 1)^p.$$

Für die Zunahme 4 und 6 erhält man folgende Zerlegung:

2)

$$S'(1, 1)^p = S(1, 4)^p - S(2, 4)^p + S(3, 4)^p - \frac{1}{4^p} S(1, 1)^p,$$

$$S'(1, 1)^p = S(1, 6)^p - S(2, 6)^p + S(3, 6)^p - S(4, 6)^p + S(5, 6)^p - \frac{1}{6^p} S(1, 1)^p$$

u. s. w. Diess führt zu folgendem Gesetze für die Zunahme $2k$:

3)

$$\begin{aligned} S'(1, 1)^p &= S(1, 2k)^p - S(2, 2k)^p + S(3, 2k)^p - \dots \\ &\quad + S(2k-1, 2k)^p - \frac{1}{(2k)^p} S(1, 1)^p. \end{aligned}$$

13)

$$S(1, 10)^p = S(1, 5)^p - \frac{1}{2^p} S(3, 5)^p,$$

$$S(1, 10)^p = S'(1, 5)^p + \frac{1}{2^p} S(3, 5)^p,$$

$$S(1, 10)^p = \frac{1}{2} S(1, 5)^p + \frac{1}{2} S'(1, 5)^p,$$

u. s. w.

§. 27.

Die im vorigen Paragraphen angedeutete Methode ist folgende. Legt man die Doppelreihe zu Grunde:

1)

$$N = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+k} + \frac{1}{m+2k} - \dots = \frac{\pi}{k} \cdot \frac{1}{\sin \frac{m\pi}{k}}$$

$$+ \frac{1}{k-m} - \frac{1}{2k-m} + \frac{1}{3k-m} - \dots$$

und differenziert wiederholt nach m , so erhält man:

2)

$$\frac{\partial N}{\partial m} = - \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{(m+k)^2} + \frac{1}{(m+2k)^2} - \dots \right) = - \frac{\pi^2}{k} \cdot \frac{\cos \frac{m\pi}{k}}{(\sin \frac{m\pi}{k})^2}$$

$$+ \frac{1}{(k-m)^2} - \frac{1}{(2k-m)^2} + \frac{1}{(3k-m)^2} - \dots$$

$$= - S'(m, k)^2 + S'(k-m, k)^2,$$

3)

$$\frac{\partial^2 N}{(\partial m)^2} = 1.2 S'(m, k)^3 + 1.2 S'(k-m, k)^3 = \frac{\pi^3}{k^3} \left[\frac{2}{(\sin \frac{m\pi}{k})^3} - \frac{1}{\sin \frac{m\pi}{k}} \right],$$

4)

$$\frac{\partial^3 N}{(\partial m)^3} = - 1^3 \cdot 1 S'(m, k)^4 + 1^3 \cdot 1 S'(k-m, k)^4$$

$$= - \frac{\pi^4}{k^4} \cos \frac{m\pi}{k} \left[\frac{6}{(\sin \frac{m\pi}{k})^4} - \frac{1}{(\sin \frac{m\pi}{k})^2} \right],$$

$$S'(1, 3)^3 = 0,986\ 590\ 986\ 2624, \cdot$$

$$S'(2, 3)^3 = 0,118\ 438\ 778\ 4250,$$

$$S'(3, 3)^3 = 0,033\ 390\ 469\ 53221,$$

u. s. w.

§. 28.

Die in §. 25. und §. 27. gefundenen Resultate dienen no
andern Anwendungen. Nimmt man das Integral

$$\int \frac{x^{m-1} - x^{k-m-1}}{1-x^k} dx = \frac{x^m}{m} + \frac{x^{k+m}}{k+m} + \frac{x^{2k+m}}{2k+m} + \dots$$

$$- \left(\frac{x^{k-m}}{k-m} + \frac{x^{2k-m}}{2k-m} + \frac{x^{3k-m}}{3k-m} + \dots \right)$$

zwischen den Grenzen 0 und 1 und bringt es mit No. 1)
in Verbindung, so erhält man:

1)

$$M = \int_0^1 \frac{x^{m-1} - x^{k-m-1}}{1-x^k} dx = \frac{1}{m} + \frac{1}{m+k} + \frac{1}{m+2k} + \dots = -\frac{1}{k}$$

$$- \left(\frac{1}{k-m} + \frac{1}{2k-m} + \frac{1}{3k-m} + \dots \right)$$

Wird nun die Darstellung Nr. 1) nach m wiederholt differ
so entsteht mit Rücksicht auf die in §. 25. gefundenen Wer

2)

$$\frac{\partial M}{\partial m} = \int_0^1 \frac{x^{m-1} + x^{k-m-1}}{1-x^k} \lg x dx = -S(m, k)^2 - S(k-m, k)^2$$

$$= -\frac{\pi^2}{k^2} \cdot \frac{1}{(\sin \frac{m\pi}{k})^2},$$

3)

$$\frac{\partial^2 M}{(\partial m)^2} = \int_0^1 \frac{x^{m-1} - x^{k-m-1}}{1-x^k} (\lg x)^2 dx = 1.2 S(m, k)^3 - 1.2 S(k-m, k)^3$$

$$= \frac{2\pi^3 \cos \frac{m\pi}{k}}{k^3 (\sin \frac{m\pi}{k})^3},$$

4)

$$\frac{\partial^3 M}{(\partial m)^3} = \int_0^1 \frac{x^{m-1} + x^{k-m-1}}{1-x^k} (\lg x)^3 dx$$

$$= -1^{3+1} S(m, k)^4 - 1^{3+1} S(k-m, k)^4 = -\frac{\pi^4}{k^4} \left[\frac{6}{(\sin \frac{m\pi}{k})^4} - \frac{4}{(\sin \frac{m\pi}{k})^2} \right],$$

5)

$$\frac{\partial^4 M}{(\partial m)^4} = \int_0^1 \frac{x^{m-1} - x^{k-m-1}}{1-x^k} (\lg x)^4 dx$$

$$= 1^{4+1} S(m, k)^5 - 1^{4+1} S(k-m, k)^5$$

$$= \frac{\pi^5}{k^5} \cos \frac{m\pi}{k} \left[\frac{24}{(\sin \frac{m\pi}{k})^5} - \frac{8}{(\sin \frac{m\pi}{k})^3} \right],$$

6)

$$\frac{\partial^5 M}{(\partial m)^5} = \int_0^1 \frac{x^{m-1} + x^{k-m-1}}{1-x^k} (\lg x)^5 dx$$

$$= -1^{5+1} S(m, k)^6 - 1^{5+1} S(k-m, k)^6$$

$$= -\frac{\pi^6}{k^6} \left[\frac{120}{(\sin \frac{m\pi}{k})^6} - \frac{120}{(\sin \frac{m\pi}{k})^4} + \frac{16}{(\sin \frac{m\pi}{k})^2} \right],$$

7)

$$\frac{\partial^6 M}{(\partial m)^6} = \int_0^1 \frac{x^{m-1} - x^{k-m-1}}{1-x^k} (\lg x)^6 dx$$

$$= 1^{6+1} S(m, k)^7 - 1^{6+1} S(k-m, k)^7$$

$$= \frac{\pi^7}{k^7} \cos \frac{m\pi}{k} \left[\frac{720}{(\sin \frac{m\pi}{k})^7} - \frac{480}{(\sin \frac{m\pi}{k})^5} + \frac{32}{(\sin \frac{m\pi}{k})^3} \right],$$

8)

$$\frac{\partial^7 M}{(\partial m)^7} = \int_0^1 \frac{x^{m-1} + x^{k-m-1}}{1-x^k} (\lg x)^7 dx$$

$$= -1^{7+1} S(m, k)^8 - 1^{7+1} S(k-m, k)^8$$

$$= -\frac{\pi^8}{k^8} \left[\frac{5040}{(\sin \frac{m\pi}{k})^8} - \frac{6720}{(\sin \frac{m\pi}{k})^6} + \frac{2016}{(\sin \frac{m\pi}{k})^4} - \frac{64}{(\sin \frac{m\pi}{k})^2} \right],$$

9)

$$\begin{aligned}\frac{\partial^8 M}{(\partial m)^8} &= \int_0^1 \frac{x^{m-1} - x^{k-m-1}}{1-x^k} (\lg x)^8 dx \\ &= 1^{8+1} S(m, k)^9 - 1^{8+1} S(k-m, k)^9 \\ &= \frac{\pi^9}{k^9} \cos \frac{m\pi}{k} \left[\frac{40320}{(\sin \frac{m\pi}{k})^9} - \frac{40320}{(\sin \frac{m\pi}{k})^7} + \frac{8064}{(\sin \frac{m\pi}{k})^5} - \frac{128}{(\sin \frac{m\pi}{k})^3} \right],\end{aligned}$$

u. s. w.

§. 29.

Nimmt man das Integral

$$\int \frac{x^{m-1} + x^{k-m-1}}{1+x^k} dx = \Sigma_0^\infty (-)^u \frac{x^{m+uk}}{m+uk} + \Sigma_0^\infty (-)^{u-1} \frac{x^{uk-m}}{uk-m}$$

zwischen den Grenzen 0 und 1, so erhält man mit Rücksicht auf Nr. 1) §. 27.:

1)

$$N = \int_0^1 \frac{x^{m-1} + x^{k-m-1}}{1+x^k} dx = S'(m, k)^1 + S'(k-m, k) = \frac{\pi}{k} \cdot \frac{1}{\sin \frac{m\pi}{k}}$$

Wird diese Gleichung wiederholt nach m differenziert, so entsteht

2)

$$\begin{aligned}\frac{\partial N}{\partial m} &= \int_0^1 \frac{x^{m-1} - x^{k-m-1}}{1+x^k} \lg x dx = -S'(m, k)^2 + S'(k-m, k)^2 \\ &= -\frac{\pi^2}{k^2} \cdot \frac{\cos \frac{m\pi}{k}}{(\sin \frac{m\pi}{k})^2},\end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 N}{(\partial m)^2} &= \int_0^1 \frac{x^{m-1} + x^{k-m-1}}{1+x^k} (\lg x)^2 dx = 1 \cdot 2 (S'(m, k)^3 + S'(k-m, k)^3) \\ &= \frac{\pi^3}{k^3} \left[\frac{2}{(\sin \frac{m\pi}{k})^3} - \frac{1}{\sin \frac{m\pi}{k}} \right],\end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 N}{(\partial m)^3} &= \int_0^1 \frac{x^{m-1} - x^{k-m-1}}{1+x^k} (\lg x)^3 dx = -1^{3+1} (S'(m, k)^4 - S'(k-m, k)^4) \\ &= -\frac{\pi^4}{k^4} \cos \frac{m\pi}{k} \left[\frac{6}{(\sin \frac{m\pi}{k})^4} - \frac{1}{(\sin \frac{m\pi}{k})^2} \right],\end{aligned}$$

5)

$$\begin{aligned}\frac{\partial^4 N}{(\partial m)^4} &= \int_0^1 \frac{x^{m-1} + x^{k-m-1}}{1+x^k} (\lg x)^4 dx = 1^{4+1} (S'(m, k)^5 + S'(k-m, k)^5) \\ &= \frac{\pi^5}{k^5} \left[\frac{24}{(\sin \frac{m\pi}{k})^5} - \frac{20}{(\sin \frac{m\pi}{k})^3} + \frac{1}{\sin \frac{m\pi}{k}} \right],\end{aligned}$$

6)

$$\begin{aligned}\frac{\partial^5 N}{(\partial m)^5} &= \int_0^1 \frac{x^{m-1} - x^{k-m-1}}{1+x^k} (\lg x)^5 dx = -1^{5+1} (S'(m, k)^6 - S'(k-m, k)^6) \\ &= -\frac{\pi^6}{k^6} \cos \frac{m\pi}{k} \left[\frac{120}{(\sin \frac{m\pi}{k})^6} - \frac{60}{(\sin \frac{m\pi}{k})^4} + \frac{1}{(\sin \frac{m\pi}{k})^2} \right],\end{aligned}$$

7)

$$\begin{aligned}\frac{\partial^6 N}{(\partial m)^6} &= \int_0^1 \frac{x^{m-1} + x^{k-m-1}}{1+x^k} (\lg x)^6 dx = 1^{6+1} (S'(m, k)^7 + S'(k-m, k)^7) \\ &= \frac{\pi^7}{k^7} \left[\frac{720}{(\sin \frac{m\pi}{k})^7} - \frac{840}{(\sin \frac{m\pi}{k})^5} + \frac{182}{(\sin \frac{m\pi}{k})^3} - \frac{1}{\sin \frac{m\pi}{k}} \right],\end{aligned}$$

8)

$$\begin{aligned}\frac{\partial^7 N}{(\partial m)^7} &= \int_0^1 \frac{x^{m-1} - x^{k-m-1}}{1+x^k} (\lg x)^7 dx = -1^{7+1} (S'(m, k)^8 - S'(k-m, k)^8) \\ &= -\frac{\pi^8}{k^8} \cos \frac{m\pi}{k} \left[\frac{5040}{(\sin \frac{m\pi}{k})^8} - \frac{4200}{(\sin \frac{m\pi}{k})^6} + \frac{546}{(\sin \frac{m\pi}{k})^4} - \frac{1}{(\sin \frac{m\pi}{k})^2} \right],\end{aligned}$$

u. s. w.

§. 30.

Setzt man nun $\frac{m}{k} = \frac{1}{2}$, so erhält man aus den Gleichungen

§. 28., da die geraden Potenzen von $\lg x$ ausfallen, weil $\cos \frac{1}{2}\pi = 0$ ist, folgende Integrale:

1)

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\lg x dx}{1-x^2} &= -\frac{\pi^2}{8}, \\ \int_0^1 \frac{(\lg x)^3 dx}{1-x^2} &= -\frac{\pi^4}{16}, \\ \int_0^1 \frac{(\lg x)^5 dx}{1-x^2} &= -\frac{\pi^6}{8},\end{aligned}$$

$$\int_0^1 \frac{(\lg x)^7 \partial x}{1-x^2} = -\frac{17\pi^8}{32},$$

u. s. w.

Euler gibt $\int_0^1 \frac{(\lg x)^7 \partial x}{1-x^2} = \frac{79\pi^8}{32}$ a. a. O. an, was auf einem Versehen zu beruhen scheint. Aus §. 29. erhält man unter der nämlichen Voraussetzung folgende:

2)

$$\int_0^1 \frac{\partial x}{1+x^2} = \frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^1 \frac{(\lg x)^2 \partial x}{1+x^2} = \frac{\pi^3}{16},$$

$$\int_0^1 \frac{(\lg x)^4 \partial x}{1+x^2} = \frac{5\pi^5}{64},$$

$$\int_0^1 \frac{(\lg x)^6 \partial x}{1+x^2} = \frac{61\pi^7}{256},$$

u. s. w.

Setzt man $\frac{m}{k} = \frac{1}{3}$, so ergibt sich aus §. 28.:

3)

$$\int_0^1 \frac{\partial x}{1+x+x^2} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}},$$

$$\int_0^1 \frac{1+x}{1-x^3} \lg x \partial x = -\frac{4\pi^2}{27},$$

$$\int_0^1 \frac{(\lg x)^2 \partial x}{1+x+x^2} = \frac{8\pi^3}{81\sqrt{3}},$$

$$\int_0^1 \frac{(1+x)(\lg x)^3 \partial x}{1-x^3} = -\frac{16\pi^4}{3^5},$$

$$\int_0^1 \frac{(\lg x)^4 \partial x}{1+x+x^2} = \frac{32\pi^5}{3^5\sqrt{3}},$$

$$\int_0^1 \frac{(1+x)(\lg x)^5 \partial x}{1-x^3} = -\frac{832\pi^6}{3^8},$$

u. s. w.

Aus §. 29. entsteht:

4)

$$\int_0^1 \frac{\partial x}{1-x+x^2} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}},$$

$$\int_0^1 \frac{1-x}{1+x^3} \lg x \partial x = -\frac{2\pi^2}{27},$$

$$m' = (M'_1 - M'_{n+1}) + \sigma',$$

und es ist dann (analog der Gleichung 6):

$$\sigma' = r^2 \operatorname{tg} a (p_2 + p_3 + p_4 \dots + p_n),$$

$$6, I) \quad \sigma' = r^2 \operatorname{tg} a [\Sigma_{2h} - p_1],$$

mithin (analog der Gleichung 7):

$$7, I) \quad \Sigma_{2h} = p_1 + \frac{m' - (M'_1 - M'_{n+1})}{r^2 \cdot \operatorname{tg} a}.$$

Es ist aber hier:

$$\left. \begin{array}{l} M'_1 = d_1 \cdot CK, \\ M'_{n+1} = d_{n+1} \cdot Cq; \end{array} \right\} \text{ (siehe Taf. III. Fig. 4.),}$$

aber:

$$CK = Ci - Ki,$$

$$CK = \frac{2}{3}r \cdot \frac{1}{\cos \Delta} - it \sin \Delta \quad (\text{vergl. Nr. 12}).$$

Es ist also:

$$CK = \frac{1}{3}r(2\sqrt{1+\tau^2} - (\operatorname{tg} a + \tau) \frac{\tau}{\sqrt{1+\tau^2}}) = \frac{1}{3}r \left(\frac{2 + 2\tau^2 - \tau \cdot \operatorname{tg} a - \tau^2}{\sqrt{1+\tau^2}} \right),$$

$$12, I) \quad CK = \frac{1}{3}r(2 - (\operatorname{tg} a - \tau)\tau) \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}};$$

und ebenso:

$$Cq = \frac{2}{3}r \frac{1}{\cos \Delta} + it \sin \Delta = \frac{1}{3}r(2\sqrt{1+\tau^2} + (\operatorname{tg} a - \tau) \frac{\tau}{\sqrt{1+\tau^2}}),$$

13, I)

$$Cq = \frac{1}{3}r(2 + \tau^2 + \tau \operatorname{tg} a) \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}} = \frac{1}{3}r(2 + (\operatorname{tg} a + \tau)\tau) \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}};$$

folglich:

$$M'_1 = \frac{1}{3}r^2(\operatorname{tg} a + \tau) \cdot \frac{1}{3}r(2 - (\operatorname{tg} a - \tau)\tau) \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}},$$

$$14, I) \quad M'_1 = \frac{1}{6}r^2(2(\operatorname{tg} a + \tau) - \tau(\operatorname{tg} a^2 - \tau^2)) \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}}$$

und

$$M'_{n+1} = \frac{1}{3}r^2(\operatorname{tg} a - \tau) \cdot \frac{1}{3}(2 + (\operatorname{tg} a + \tau)\tau) \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}};$$

$$\begin{aligned}
& \sum_1^{\infty} \int_a^{a+2c} f(z) \cos \frac{\mu\pi(z-x)}{c} \partial z \\
& = -\frac{1}{2} \int_a^{a+2c} f(z) \partial z + cf(x), \quad a < x < a+2c, \\
& = -\frac{1}{2} \int_a^{a+2c} f(z) \partial z + \frac{c}{2} [f(a+2c) + f(a)], \\
& \quad x = a \text{ oder } = a+2c.
\end{aligned}$$

Ist b zwischen a und $a+2c$, $f(z)$ Null von $z=b$ bis $z=a+2c$, dagegen $F(z)$ von $z=a$ bis $z=b$, so folgt hieraus:

$$\begin{aligned}
& \sum_1^{\infty} \int_a^b F(z) \cos \frac{\mu\pi(z-x)}{c} \partial z \\
& = -\frac{1}{2} \int_a^b F(z) \partial z + cF(x), \quad a < x < b, \\
& = -\frac{1}{2} \int_a^b F(z) \partial z + \frac{c}{2} F(x), \quad x = a \text{ oder } = b, \\
& = -\frac{1}{2} \int_a^b F(z) \partial z, \quad b < x < a+2c.
\end{aligned}$$

Für $x=a+2c$ erhält man denselben Werth wie für $x=a$. Hier ist $b-a < 2c$, sonst a und b beliebig.

Setzt man in (6) $a+2mc$ für a , $x+2mc$ für x , wo m eine ganze (positive oder negative) Zahl, so folgt wegen

$$\cos \frac{\mu\pi(z-x-2mc)}{c} = \cos \frac{\mu\pi(z-x)}{c}:$$

$$\begin{aligned}
& \sum_1^{\infty} \int_{a+2mc}^{a+2mc+2c} f(z) \cos \frac{\mu\pi(z-x)}{c} \partial z \\
& = -\frac{1}{2} \int_{a+2mc}^{a+2mc+2c} f(z) \partial z + cf(x+2mc), \quad a < x < a+2c, \\
& = -\frac{1}{2} \int_{a+2mc}^{a+2mc+2c} f(z) \partial z + \frac{c}{2} [f(a+2mc+2c) + f(a+2mc)], \\
& \quad x = a \text{ oder } = a+2c.
\end{aligned}$$

Setzt man eben so in (7) $a+2mc$ für a , $b+2mc$ für $x+2mc$ für x , wo noch $b+2mc-(a+2mc) < 2c$, so folgt:

$$\begin{aligned}
 & \sum_1^x \int_{a+2mc}^{b+2mc} f(z) \cos \frac{\mu\pi(z-x)}{c} dz \\
 &= -\frac{1}{2} \int_{a+2mc}^{b+2mc} f(z) dz + cf(x+2mc), \quad a < x < b, \\
 &= -\frac{1}{2} \int_{a+2mc}^{b+2mc} f(z) dz + \frac{c}{2} f(x+2mc), \quad x = a \text{ oder } = b, \\
 &= -\frac{1}{2} \int_{a+2mc}^{b+2mc} f(z) dz, \quad b < x < a+2c.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Für $x = a + 2c$ erhält man denselben Werth wie für $x = a$. Dabei muss $b - a < 2c$ sein.

§. 3.

Sei $B > A$, $B - A = 2nc + \rho$, wo n eine positive ganze Zahl (Null eingeschlossen), ρ zwischen 0 und $2c$. Alsdann ist:

$$\begin{aligned}
 & \sum_1^\infty \int_A^B f(z) \cos \frac{\mu\pi(z-x)}{c} dz \\
 &= \sum_1^\infty \int_A^{A+2c} f(z) \cos \frac{\mu\pi(z-x)}{c} dz + \sum_1^\infty \int_{A+2c}^{A+4c} f(z) \cos \frac{\mu\pi(z-x)}{c} dz + \dots \\
 &+ \sum_1^\infty \int_{A+2(n-1)c}^{A+2nc} f(z) \cos \frac{\mu\pi(z-x)}{c} dz + \sum_1^\infty \int_{A+2nc}^{A+2nc+\rho} f(z) \cos \frac{\mu\pi(z-x)}{c} dz.
 \end{aligned}$$

Von den Grössen zweiter Seite ist nun die erste nach (6):

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2} \int_A^{A+2c} f(z) dz + cf(x), \quad A < x < A+2c, \\
 & -\frac{1}{2} \int_A^{A+2c} f(z) dz + \frac{c}{2} [f(A+2c) + f(A)], \quad x = A \text{ oder } = A+2c;
 \end{aligned}$$

die zweite nach (8):

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2} \int_{A+2c}^{A+4c} f(z) dz + cf(x+2c), \quad A < x < A+2c, \\
 & -\frac{1}{2} \int_{A+2c}^{A+4c} f(z) dz + \frac{c}{2} [f(A+4c) + f(A+2c)], \quad x = A \text{ oder } A+2c;
 \end{aligned}$$

die dritte nach (8):

$$-\frac{1}{2} \int_{A+4c}^{A+6c} f(z) \partial z + cf(x), \quad A < x < A+2c,$$

$$-\frac{1}{2} \int_{A+4c}^{A+6c} f(z) \partial z + \frac{c}{2} [f(A+6c) + f(A+4c)], \quad x = A \text{ od. } = A+2c$$

u. s. w.

die vorletzte nach (8):

$$-\frac{1}{2} \int_{A+2(n-1)c}^{A+2nc} f(z) \partial z + cf[x + 2(n-1)c], \quad A < x < A+2c,$$

$$-\frac{1}{2} \int_{A+2(n-1)c}^{A+2nc} f(z) \partial z + \frac{c}{2} [f(A+2nc) + f(A+2nc-2c)],$$

$$x = A \text{ oder } = A+2c;$$

die letzte ist Null, wenn $\varrho = 0$; dieselbe ist für $0 < \varrho < 2c$ nach

$$-\frac{1}{2} \int_{A+2nc}^B f(z) \partial z + cf(x + 2nc), \quad A < x < A + \varrho,$$

$$-\frac{1}{2} \int_{A+2nc}^B f(z) \partial z + \frac{c}{2} f(x + 2nc), \quad x = A \text{ oder } A + \varrho,$$

$$-\frac{1}{2} \int_{A+2nc}^B f(z) \partial z, \quad A + \varrho < x < A + 2c,$$

für $x = A + 2c$ dasselbe wie für $x = A$;

sie ist für $\varrho = 2c$ nach (8):

$$-\frac{1}{2} \int_{A+2nc}^B f(z) \partial z + cf(x + 2nc), \quad A < x < A + 2c,$$

$$-\frac{1}{2} \int_{A+2nc}^B f(z) \partial z + \frac{c}{2} [f(B) + f(A + 2nc)], \quad x = A \text{ oder } = A + 2c$$

Hieraus folgt, dass man drei Fälle: $\varrho = 0$, $< 2c$, $= 2c$, unterscheiden müsse, so wie im zweiten Falle x von A bis $A + B - 2nc$, und von $A + \varrho$ bis $A + 2c$ gehen zu lassen habe.

I. Sei $B - A = 2nc$, n positiv ganz.

Es ist

516 *Stieltjes: Allgemeine Form der*

0 und $2c$ so, dass $x = A = 2ac + x'$,
dann liegt $A + x'$ zwischen A und A .

$x = A = 2ac + x'$, A
so ist:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_A^B f(z) \cos \frac{\mu \pi (z-x)}{c} dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A^B f(z) \cos \frac{\mu \pi (z-x')}{c} dz$$

Da man nun letztere Grösse zu b
die erste bestimmt (bei beliebigem x)

§ 4.

Der Fall I. liefert ($x = a$, $A = a$,

$$\int_a^{a+2nc} f(z) dz = 2c [\frac{1}{2} f(a) + f(a+2c) + \dots + f(a+2nc)] - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^{a+2nc} f(z) \cos \frac{\mu \pi (z-a)}{c} dz$$

Für den besonderen Fall, da $n \rightarrow \infty$
wegen (6):

$$2c [\frac{1}{2} f(a) + \frac{1}{2} f(a+2c)] - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^{a+2nc} f(z) \cos \frac{\mu \pi (z-a)}{c} dz$$

Setzt man hier $2c = h$, $a + 2nc =$

(10)

$$\int_a^b f(z) dz = h [\frac{1}{2} f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \dots + f(b-h) + \frac{1}{2} f(b)] - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f(z) \cos \frac{2\mu \pi (z-a)}{h} dz,$$

wo $b-a = nh$, n positiv ganz;

(10')

$$\int_a^{a+h} f(z) dz = \frac{1}{2} h [f(a) + f(a+h)] - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^{a+h} f(z) \cos \frac{2\mu \pi (z-a)}{h} dz$$

wenn

$$R = \frac{2h^{2m}}{(2\pi)^{2m}} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu^{2m}} \int_a^b f^{2m}(z) \cos \frac{2\mu\pi(z-a)}{h} dz. \quad (11)$$

Dabei ist m eine beliebige positive, ganze Zahl. Für $m=0$ hätte man kurzweg die (10).

Setzen wir noch:

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu^{2r}} = \frac{2^{2r-1}\pi^{2r}}{1 \cdot 2 \dots 2r} B_{2r-1}, \quad (12)$$

so ergibt sich endlich:

(13)

$$\begin{aligned} \int_a^b f(z) dz &= h \left[\frac{1}{2} f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \dots + f(b-h) + \frac{1}{2} f(b) \right] \\ &\quad - \frac{h^2 B_1}{1 \cdot 2} [f'(b) - f'(a)] + \frac{h^4 B_3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} [f'''(b) - f'''(a)] - \dots \\ &\quad \dots \pm \frac{h^{2m} B_{2m-1}}{1 \cdot 2 \dots 2m} [f^{2m-1}(b) - f^{2m-1}(a)] \mp R, \end{aligned}$$

wo R durch (11) gegeben ist. Dabei ist m wie oben beschaffen, und $h = \frac{b-a}{n}$. Die Zahlen B_1, B_3, \dots sind die Bernoulli'schen Zahlen.

Wäre $n=1$, also $h=b-a$, so würde auf der zweiten Seite in der ersten eingeklammerten Summe bloss $\frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b)$ stehen; sonst bliebe Alles ungeändert, nur dass natürlich $b=a+h$ wäre. Für $m=0$ fielen alle Glieder mit den B_1, B_3, \dots weg, und R wäre mit dem Vorzeichen $-$ zu nehmen, nach (10).

§. 5.

Wir wollen nun den Werth von R näher untersuchen. Zum dem Ende unterscheiden wir zwei Fälle.

1. $f^{2m}(z)$ behält dasselbe Zeichen von $z=a$ bis $z=b$ und bleibt endlich.

Da $\cos \frac{2\mu\pi(z-a)}{h}$ als äusserste Werthe $+1$ und -1 hat, so liegt die Grösse

$$\int_a^b f^{2m}(z) \cos \frac{2\mu\pi(z-a)}{h} dz$$

zwischen

$$-\int_a^b f^{2m}(z) dz \text{ und } +\int_a^b f^{2m}(z) dz,$$

d. h. zwischen

$$-[f^{2m-1}(b) - f^{2m-1}(a)] \text{ und } +[f^{2m-1}(b) - f^{2m-1}(a)].$$

Da dies für alle μ in derselben Weise gilt, d. h. für alle μ die erste Grösse etwa kleiner und die zweite grösser ist als das genannte Integral, alle Glieder in R ferner addirt sind, so ist offenbar

R zwischen

$$-\frac{2h^{2m}}{(2\pi)^{2m}} [f^{2m-1}(b) - f^{2m-1}(a)] \Sigma \frac{1}{\mu^{2m}}$$

und

$$+\frac{2h^{2m}}{(2\pi)^{2m}} [f^{2m-1}(b) - f^{2m-1}(a)] \Sigma \frac{1}{\mu^{2m}},$$

d. h. wegen (12):

R zwischen

$$-\frac{h^{2m} B_{2m-1}}{1 \cdot 2 \dots 2m} [f^{2m-1}(b) - f^{2m-1}(a)]$$

und

$$+\frac{h^{2m} B_{2m-1}}{1 \cdot 2 \dots 2m} [f^{2m-1}(b) - f^{2m-1}(a)].$$

Man hat also folgenden Satz:

Ist $h = \frac{b-a}{n}$, wo n eine beliebige positive und ganze Zahl ($b > a$ gedacht), so ist:

(14)

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= h[f(a) + f(a+h) + \dots + f(b-h)] + \frac{h}{2}[f(b) - f(a)] \\ &\quad - \frac{B_1 h^2}{1 \cdot 2} [f'(b) - f'(a)] + \frac{B_3 h^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} [f'''(b) - f'''(a)] - \dots \\ &\quad \pm \frac{B_{2m-1} h^{2m}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2m} [f^{2m-1}(b) - f^{2m-1}(a)] + \frac{\theta B_{2m-1} h^{2m}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2m} [f^{2m-1}(b) - f^{2m-1}(a)], \end{aligned}$$

wenn θ zwischen -1 und $+1$ liegt, m eine beliebige positive ganze Zahl ist, und $f^{2m}(x)$ dasselbe Zeichen behält, wenn x von a bis b geht.

Für $m =$

$$\int_a^b f(x) dx = h[f(a) + \dots + f(b-h)] + \frac{h}{2}[f(b) + f(a)]$$

$$= \frac{B_1 h^2}{1 \cdot 2} [f'(b) - f'(a)] + \frac{B_1 h^2}{1 \cdot 2} [f'(b) - f'(a)]$$

4. Für $m=0$ lässt sich ebenfalls die Formel bilden; sie hat aber dann keinen Wert, da bei $m=0$ der Ausdruck $f'(b) - f'(a)$ nicht definiert ist.

II. $f^{(2m)}(x)$ bleibt endlich von $x=a$ bis $x=b$.

Da

$$\cos \frac{2\mu\pi(x-a)}{h} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\mu\pi(x-a)}{h}$$

so ist:

$$\begin{aligned} \int_a^b f^{(2m)}(x) \cos \frac{2\mu\pi(x-a)}{h} dx &= \int_a^b f^{(2m)}(x) [1 - 2 \sin^2 \frac{\mu\pi(x-a)}{h}] dx \\ &= f^{(2m-1)}(b) - f^{(2m-1)}(a) - 2 \int_a^b f^{(2m)}(x) \sin^2 \frac{\mu\pi(x-a)}{h} dx. \end{aligned}$$

Demnach ist:

$$\begin{aligned} R &= \frac{2h^{2m}}{(2\pi)^{2m}} [f^{(2m-1)}(b) - f^{(2m-1)}(a)] \Sigma \frac{1}{\mu^{2m}} \\ &\quad - \frac{4h^{2m}}{(2\pi)^{2m}} \Sigma \frac{1}{\mu^{2m}} \int_a^b f^{(2m)}(x) \sin^2 \frac{\mu\pi(x-a)}{h} dx, \end{aligned}$$

und also:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= h[f(a) + \dots + f(b-h)] + \frac{h}{2}[f(b) + f(a)] - \frac{B_1 h^2}{1 \cdot 2} [f'(b) - f'(a)] + \\ &\quad \dots \mp \frac{B_{2m-2} h^{2m-2}}{1 \cdot \dots \cdot 2m-2} [f^{(2m-2)}(b) - f^{(2m-2)}(a)] \pm R', \end{aligned}$$

$$R' = \frac{4h^{2m}}{(2\pi)^{2m}} \Sigma \frac{1}{\mu^{2m}} \int_a^b f^{(2m)}(x) \sin^2 \frac{\mu\pi(x-a)}{h} dx$$

Da $\sin^2 \frac{\mu\pi(x-a)}{h}$ stets positiv, so liegt das Integral

$$\int_a^b f(x) dx = h[f(a) + f(a+h) + \dots + f(b-h)] \\ + \frac{h}{2}[f(b) - f(a)] - \frac{B_1 h^2 (b-a)}{1 \cdot 2} f''[a + \theta(b-a)],$$

wenn $f''(x)$ von a bis b endlich bleibt.

§. 6.

Setzt man in (14) a und b positiv voraus, $b = a + nh$, ferner $f(x) = x^r$, so folgt daraus:

$$(16) \\ a^r + (a+h)^r + (a+2h)^r + \dots + (a+nh)^r \\ = \frac{(a+nh)^{r+1} - a^{r+1}}{(r+1)h} + \frac{(a+nh)^r + a^r}{2} + \frac{B_1 r h}{1 \cdot 2} [(a+nh)^{r-1} - a^{r-1}] - \dots \\ \pm B_{2m-1} \frac{r(r-1)\dots(r-2m+2)h^{2m-1}}{1 \cdot 2 \dots 2m} [(a+nh)^{r-2m+1} - a^{r-2m+1}] \\ + \frac{\theta B_{2m-1} r \dots (r-2m+2)h^{2m-1}}{1 \cdot 2 \dots 2m} [(a+nh)^{r-2m+1} - a^{r-2m+1}],$$

wo θ zwischen -1 und $+1$. Ist r eine ganze positive Zahl, so fällt das letzte Glied weg, sobald $m > \frac{r+2}{2}$.

Diese Formel gilt auch für $n=1$, wie wir oben gesehen. Setzen wir also $a=1$, $h=1$, $n=1$ und nehmen r als ganze positive Zahl, so ist:

$$(17) \\ \frac{r B_1}{1 \cdot 2} (2^{r-1} - 1) - \frac{r(r-1)(r-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} B_3 (2^{r-3} - 1) \\ + \frac{r(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)}{1 \cdot 2 \dots 6} B_5 (2^{r-5} - 1) - \dots = \frac{2^r + 1}{2} - \frac{2^{r+1} - 1}{r+1}$$

aus welcher Formel sich B_1, B_3, \dots rücklaufend berechnen lassen, wenn man nach einander $r = 2, 4, \dots$ setzt.

Für $r = -1$ kann man (16) nicht zulassen, weil wir $\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1}$ setzten, das jetzt $= l(x)$ ist. Demnach:

324 Grunert: Die Anwendung der

also nach §. 3.:

$$\cos \frac{1}{2} E = \frac{\cos \frac{1}{2} a^2}{\sin \frac{1}{2} b^2 \cos \frac{1}{2} c^2} = \frac{\cos \frac{1}{2} a}{2 \sin \frac{1}{2} b}$$

oder:

$$\cos \frac{1}{2} E = \frac{\cos \frac{1}{2} a^2 + \cos \frac{1}{2} b^2 c}{2 \cos \frac{1}{2} a}$$

folglich nach bekannten Relationen

$$\cos \frac{1}{2} E = \frac{1 + \cos a + \frac{1}{2}(1 + \cos b)(1 + \cos c)}{4 \cos \frac{1}{2} a}$$

woraus sich mittelst der leichtesten

$$\cos \frac{1}{2} E = \frac{1 + \cos a}{4 \cos \frac{1}{2} a}$$

ergiebt.

Es ist:

$$\begin{aligned} OC'' + OB' + B'C'' &= \cot \frac{1}{2} b \\ &= \frac{\cos \frac{1}{2}(b - c) + \cos \frac{1}{2} a}{\sin \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c} \\ &= \frac{2 \cos \frac{1}{2}(a - b + c) \cos \frac{1}{2}(a + b - c)}{\sin \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -OC'' + OB' + B'C'' &= -\cot \frac{1}{2} b + \tan \frac{1}{2} c + \frac{\cos \frac{1}{2} a}{\sin \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c} \\ &= \frac{-\cos \frac{1}{2}(b + c) + \cos \frac{1}{2} a}{\sin \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c} \\ &= \frac{2 \sin \frac{1}{2}(a + b + c) \sin \frac{1}{2}(-a + b + c)}{\sin \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} OC'' - OB' + B'C'' &= \cot \frac{1}{2} b - \tan \frac{1}{2} c + \frac{\cos \frac{1}{2} a}{\sin \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c} \\ &= \frac{\cos \frac{1}{2}(b + c) + \cos \frac{1}{2} a}{\sin \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c} \\ &= \frac{2 \cos \frac{1}{2}(a + b + c) \cos \frac{1}{2}(-a + b + c)}{\sin \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} OC'' + OB' - B'C'' &= \cot \frac{1}{2} b + \tan \frac{1}{2} c - \frac{\cos \frac{1}{2} a}{\sin \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c} \\ &= \frac{\cos \frac{1}{2}(b - c) - \cos \frac{1}{2} a}{\sin \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c} \\ &= \frac{2 \sin \frac{1}{2}(a - b + c) \sin \frac{1}{2}(a + b - c)}{\sin \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c}. \end{aligned}$$

$$\frac{f'}{g'} = \frac{a'd' + b'c'}{a'b' + c'd'}$$

oder

$$f'(a'b' + c'd') = g'(a'd' + b'c').$$

Nach dem Obigen ist aber:

$$\begin{aligned} a'b' + c'd' &= \frac{\tan \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b}{\cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}f} + \frac{\sin \frac{1}{2}c \tan \frac{1}{2}d}{\cos \frac{1}{2}d \cos \frac{1}{2}f} \\ &= \frac{\sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}d^2 + \sin \frac{1}{2}c \sin \frac{1}{2}d \cos \frac{1}{2}a^2}{\cos \frac{1}{2}a^2 \cos \frac{1}{2}d^2 \cos \frac{1}{2}f}, \end{aligned}$$

und folglich:

$$f'(a'b' + c'd') = \frac{\sin \frac{1}{2}f (\sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}d^2 + \sin \frac{1}{2}c \sin \frac{1}{2}d \cos \frac{1}{2}a^2)}{\cos \frac{1}{2}a^2 \cos \frac{1}{2}d^2 \cos \frac{1}{2}f^2}.$$

Ferner ist nach dem Obigen:

$$\begin{aligned} a'd' + b'c' &= \tan \frac{1}{2}a \tan \frac{1}{2}d + \frac{\sin \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}c}{\cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}d \cos \frac{1}{2}f^2} \\ &= \frac{\sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}d \cos \frac{1}{2}f^2 + \sin \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}c}{\cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}d \cos \frac{1}{2}f^2}, \end{aligned}$$

und folglich:

$$g'(a'd' + b'c') = \frac{\sin \frac{1}{2}g (\sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}d \cos \frac{1}{2}f^2 + \sin \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}c)}{\cos \frac{1}{2}a^2 \cos \frac{1}{2}d^2 \cos \frac{1}{2}f^2}.$$

Also haben wir nach dem Obigen die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} &\sin \frac{1}{2}f (\sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}d^2 + \sin \frac{1}{2}c \sin \frac{1}{2}d \cos \frac{1}{2}a^2) \\ &= \sin \frac{1}{2}g (\sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}d \cos \frac{1}{2}f^2 + \sin \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}c), \end{aligned}$$

welche man leicht auf nachstehende Form bringt:

$$\begin{aligned} &\sin \frac{1}{2}f (\sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b + \sin \frac{1}{2}c \sin \frac{1}{2}d) \\ &- \sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}d \sin \frac{1}{2}f (\sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}c + \sin \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}d) \\ &= \sin \frac{1}{2}g (\sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}d + \sin \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}c) \\ &- \sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}d \sin \frac{1}{2}f \cdot \sin \frac{1}{2}f \sin \frac{1}{2}g; \end{aligned}$$

also ist, weil nach dem vorher Bewiesenen

$$\sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}c + \sin \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}d = \sin \frac{1}{2}f \sin \frac{1}{2}g$$

ist:

$$B'D + D'C'' - B'C'' = \frac{\sin \frac{1}{2}g}{\cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}d} + \frac{\cos \frac{1}{2}c}{\cos \frac{1}{2}d \sin \frac{1}{2}f} - \frac{\cos \frac{1}{2}b}{\cos \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}f}$$

$$= \frac{\sin \frac{1}{2}f \sin \frac{1}{2}g - \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}d + \cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}c}{\cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}d \sin \frac{1}{2}f},$$

$$B'C'' \cdot D'C'' = \frac{\cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c}{\cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}d \sin^2 \frac{1}{2}f};$$

folglich:

$$\sin \frac{1}{4}E = \sqrt{\frac{(\sin \frac{1}{2}f \sin \frac{1}{2}g + \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}d - \cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}c) \times (\sin \frac{1}{2}f \sin \frac{1}{2}g - \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}d + \cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}c)}{4 \cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c \cos \frac{1}{2}d}}.$$

Ferner ist:

$$B'D + B'C'' + D'C'' = \frac{\sin \frac{1}{2}g}{\cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}d} + \frac{\cos \frac{1}{2}b}{\cos \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}f} + \frac{\cos \frac{1}{2}c}{\cos \frac{1}{2}d \sin \frac{1}{2}f}$$

$$= \frac{\sin \frac{1}{2}f \sin \frac{1}{2}g + \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}d + \cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}c}{\cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}d \sin \frac{1}{2}f},$$

$$B'C'' + D'C'' - B'D = \frac{\cos \frac{1}{2}b}{\cos \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}f} + \frac{\cos \frac{1}{2}c}{\cos \frac{1}{2}d \sin \frac{1}{2}f} - \frac{\sin \frac{1}{2}g}{\cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}d}$$

$$= \frac{-\sin \frac{1}{2}f \sin \frac{1}{2}g + \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}d + \cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}c}{\cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}d \sin \frac{1}{2}f},$$

$$B'C'' \cdot D'C'' = \frac{\cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c}{\cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}d \sin^2 \frac{1}{2}f},$$

folglich:

$$\cos \frac{1}{4}E = \sqrt{\frac{(\sin \frac{1}{2}f \sin \frac{1}{2}g + \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}d + \cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}c) \times (-\sin \frac{1}{2}f \sin \frac{1}{2}g + \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}d + \cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}c)}{4 \cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c \cos \frac{1}{2}d}}.$$

Weil

$$\sin \frac{1}{2}E = 2 \sin \frac{1}{4}E \cos \frac{1}{4}E$$

ist, so ist:

$$\sin \frac{1}{4}E = \sqrt{\frac{\begin{aligned} &(\sin \frac{1}{2}f \sin \frac{1}{2}g + \cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}c + \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}d) \\ &\times (-\sin \frac{1}{2}f \sin \frac{1}{2}g + \cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}c + \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}d) \\ &\times (\sin \frac{1}{2}f \sin \frac{1}{2}g - \cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}c + \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}d) \\ &\times (\sin \frac{1}{2}f \sin \frac{1}{2}g + \cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}c - \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}d) \end{aligned}}{2 \cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c \cos \frac{1}{2}d}}.$$

es ist:

$$\begin{aligned} \sin \frac{1}{2}f / \sin \frac{1}{2}g + \cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}c + \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}d &= 2 \cos \frac{1}{2}(\delta' + \delta'') \\ - \sin \frac{1}{2}f / \sin \frac{1}{2}g + \cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}c + \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}d &= 2 \cos \frac{1}{2}(\sigma' + \sigma'') \cos \frac{1}{2}(\sigma' - \sigma''); \end{aligned}$$

also:

$$\cos \frac{1}{2}E = \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2}(\delta' + \delta'') \cos \frac{1}{2}(\delta' - \delta'') \cos \frac{1}{2}(\sigma' + \sigma'') \cos \frac{1}{2}(\sigma' - \sigma'')}{\cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c \cos \frac{1}{2}d}}$$

Hieraus würden sich wiederum verschiedene and ableiten lassen.

XXIII.

Neue analytische Darstellung der Haupteigenschaften der stereographischen Projection.

Von

dem Herausgeber.

§. 1.

Wir nehmen die durch den Mittelpunkt der Kugel gelegte Tafel als Ebene der xy , den Mittelpunkt der Kugel als Anfang eines rechtwinkligen Coordinatensystems der xyz an, und setzen das Auge in den Punkt, in welchem die Oberfläche der Kugel von dem positiven Theile der Axe der z geschnitten wird; den Halbmesser der Kugel wollen wir wie gewöhnlich durch r bezeichnen.

Ein Punkt auf der Kugeloberfläche sei (xw) , und $(x'v'w')$ sei dessen Projection auf der Tafel; es ist:

$$1) \dots \dots \dots x^2 + v^2 + w^2 = r^2.$$

$$7) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi &= -2r \cos \beta \cos \gamma, & \varphi' &= -\frac{\cos \beta}{\cos \gamma} r, \\ w &= r(1 - 2\cos \gamma^2) = -r \cos 2\gamma; & w' &= 0; \end{aligned} \right.$$

welche die hauptsächlichste Grundlage unserer folgenden Betrachtungen bilden.

Leicht leitet man aus diesen Relationen auch die Gleichung:

$$8) \quad u'^2 + v'^2 + w'^2 = 2r^2 \sin^2 \gamma,$$

ab.

§. 2.

Wir wollen nun die Coordinaten u', v', w' des Bildes durch die Coordinaten u, v, w des entsprechenden Punktes ausdrücken.

Aus den Gleichungen 7) ergibt sich auf der Stelle:

$$9) \quad u' = \frac{u}{2\cos \gamma^2}, \quad v' = \frac{v}{2\cos \gamma^2}, \quad w' = 0;$$

nun ist aber:

$$w = r(1 - 2\cos \gamma^2), \quad \cos \gamma^2 = \frac{r - w}{2r};$$

also nach 9):

$$10) \quad u' = \frac{ru}{r - w}, \quad v' = \frac{rv}{r - w}, \quad w' = 0.$$

Nach 1) ist:

$$w = \pm \sqrt{r^2 - u^2 - v^2},$$

also:

$$11) \quad \left\{ \begin{aligned} u' &= \frac{ru}{r \mp \sqrt{r^2 - u^2 - v^2}}, \\ v' &= \frac{rv}{r \mp \sqrt{r^2 - u^2 - v^2}}, \\ w' &= 0. \end{aligned} \right.$$

§. 4.

Wir wollen jetzt die Projection eines Kugelschnitts betrachten, dessen Ebene durch die Gleichung

$$13) \dots \dots \dots Ax + By + Cz + D = 0$$

charakterisirt werden mag. Liegen also alle durch (10) dargestellte Punkte der Kugelfläche in dieser Ebene, so ist nach 7):

$$2r(A \cos \alpha + B \cos \beta) \cos \gamma - Cr(1 - 2 \cos^2 \gamma) - D = 0.$$

Nun ist aber ferner nach 7):

$$\cos \alpha = -\frac{u'}{r} \cos \gamma, \quad \cos \beta = -\frac{v'}{r} \cos \gamma;$$

folglich:

$$A \cos \alpha + B \cos \beta = -\frac{Au' + Bv'}{r} \cos \gamma,$$

und daher nach dem Vorhergehenden, wie man leicht übersieht:

$$2\{Cr - (Au' + Bv')\} \cos \gamma^2 = Cr + D,$$

also:

$$\cos \gamma^2 = \frac{Cr + D}{2\{Cr - (Au' + Bv')\}};$$

folglich, in Verbindung mit dem Vorhergehenden:

$$\cos \alpha^2 = \frac{u'^2}{r^2} \cdot \frac{Cr + D}{2\{Cr - (Au' + Bv')\}},$$

$$\cos \beta^2 = \frac{v'^2}{r^2} \cdot \frac{Cr + D}{2\{Cr - (Au' + Bv')\}},$$

$$\cos \gamma^2 = \frac{Cr + D}{2\{Cr - (Au' + Bv')\}}.$$

Aus diesen Gleichungen erhält man, weil

$$\cos \alpha^2 + \cos \beta^2 + \cos \gamma^2 = 1$$

für den Halbmesser der Projection aber den Ausdruck:

$$\pm \frac{cr}{c-r} \sqrt{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)r^2 - 1}.$$

wo man das obere oder untere Zeichen zu nehmen hat, jenachdem $\frac{c}{c-r}$ positiv oder negativ ist.

§. 5.

Vom Mittelpunkte der Kugel, welcher der Anfang der Coordinaten ist, fällen wir auf die durch die Gleichung 13) charakterisirte Ebene ein Perpendikel, und bezeichnen dessen Durchschnittspunkte mit der Kugelfläche durch (xyz) . Die Gleichungen dieses Perpendikels sind nach den Lehren der analytischen Geometrie:

$$\frac{x}{A} = \frac{y}{B} = \frac{z}{C},$$

und zur Bestimmung von x , y , z haben wir also die Gleichungen:

$$\frac{x}{A} = \frac{y}{B} = \frac{z}{C}, \quad x^2 + y^2 + z^2 = r^2;$$

aus denen sich:

$$15) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} x = \pm \frac{Ar}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \\ y = \pm \frac{Br}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \\ z = \pm \frac{Cr}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \end{array} \right.$$

ergibt. Die Gleichungen der vom Auge nach $(x y z)$ gezogenen Geraden sind hiernach:

$$\pm \frac{x}{\frac{Ar}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}} = \pm \frac{y}{\frac{Br}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}} = \frac{z - r}{\frac{Cr}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}},$$

also offenbar:

$$\frac{x}{A} = \frac{y}{B} = \frac{z - r}{C \mp \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

und ist nun $(x' y' z')$ das Bild von $(x y z)$, so ist:

$$\frac{x'}{A} = \frac{y'}{B} = - \frac{r}{C \mp \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

also:

$$16) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} x' = - \frac{Ar}{C \mp \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \\ y' = - \frac{Br}{C \mp \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \\ z' = 0. \end{array} \right.$$

Legt man durch den Mittelpunkt der Tafel und den Mittelpunkt des Bildes unsers Kugelkreises eine Gerade, so ist deren Gleichung:

$$\frac{x}{Ar^2} = \frac{y}{Br^2}, \\ - \frac{Cr + D}{Cr + D}$$

also:

$$\frac{x}{A} = \frac{y}{B},$$

und man sieht nun auf der Stelle, dass diese Gleichung befriedigt wird, wenn man für x, y die obigen Werthe von x', y' setzt, woraus man schliesst, dass der Mittelpunkt der Tafel, der Mittelpunkt des Bildes unsers Kugelkreises und die Bilder der Punkte, in denen die Kugelfläche von dem von dem Mittelpunkte der Kugel auf die Ebene des Kugelkreises gefällten Perpendikel geschnitten wird, jederzeit in **einer** geraden Linie liegen.

§. 6.

Durch den Punkt (uvw) auf der Kugelfläche, dessen Coordinaten bekanntlich:

$$u = -2r \cos \alpha \cos \gamma,$$

$$v = -2r \cos \beta \cos \gamma,$$

$$w = r(1 - 2 \cos^2 \gamma) = -r \cos 2\gamma$$

sind, denken wir uns eine beliebige Gerade gelegt, deren Gleichungen:

$$17) \quad \frac{x + 2r \cos \alpha \cos \gamma}{\cos \theta} = \frac{y + 2r \cos \beta \cos \gamma}{\cos \omega} = \frac{z + r \cos 2\gamma}{\cos \bar{\omega}}$$

sein mögen, wo $\theta, \omega, \bar{\omega}$ die 180° nicht übersteigenden Winkel bezeichnen, welche der eine der beiden von dem Punkte (uvw) ausgehenden Theile unserer Geraden mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z einschliesst.

Die Gleichungen des nach dem Punkte (uvw) gezogenen Kugelhalbmessers sind:

$$18) \quad \dots \quad \frac{x}{2 \cos \alpha \cos \gamma} = \frac{y}{2 \cos \beta \cos \gamma} = \frac{z}{\cos 2\gamma}.$$

Soll die erstere Gerade, wie wir nun annehmen wollen, auf diesem Kugelhalbmesser senkrecht stehen oder die Kugelfläche berühren, so muss nach den Lehren der analytischen Geometrie die Gleichung:

$$19) \quad 2 \cos \alpha \cos \gamma \cos \theta + 2 \cos \beta \cos \gamma \cos \omega + \cos 2\gamma \cos \bar{\omega} = 0$$

oder:

$$20) \quad 2(\cos \alpha \cos \theta + \cos \beta \cos \omega + \cos \gamma \cos \bar{\omega}) \cos \gamma = \cos \bar{\omega}$$

Statt finden.

ergeben, so dass man also, wenn \mathfrak{G} einen gewissen Factor bezeichnet:

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} &= \mathfrak{G} \left(\frac{\cos \omega}{\cos \bar{\omega}} - \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} \right), \\ \mathfrak{B} &= -\mathfrak{G} \left(\frac{\cos \theta}{\cos \bar{\omega}} - \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} \right), \\ \mathfrak{C} &= -\mathfrak{G} \frac{\cos \alpha \cos \omega - \cos \beta \cos \theta}{\cos \gamma \cos \bar{\omega}};\end{aligned}$$

oder auch bloss:

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} &= \frac{\cos \omega}{\cos \bar{\omega}} - \frac{\cos \beta}{\cos \gamma}, \\ \mathfrak{B} &= -\left(\frac{\cos \theta}{\cos \bar{\omega}} - \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} \right), \\ \mathfrak{C} &= -\frac{\cos \alpha \cos \omega - \cos \beta \cos \theta}{\cos \gamma \cos \bar{\omega}};\end{aligned}$$

offenbar auch bloss:

$$21) \dots \dots \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{A} &= \cos \beta \cos \bar{\omega} - \cos \gamma \cos \omega, \\ \mathfrak{B} &= \cos \gamma \cos \theta - \cos \alpha \cos \bar{\omega}, \\ \mathfrak{C} &= \cos \alpha \cos \omega - \cos \beta \cos \theta \end{aligned} \right.$$

setzen kann. Daher ist die Gleichung unserer Ebene:

$$22) \dots + (\cos \beta \cos \bar{\omega} - \cos \gamma \cos \omega) \left(x + \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} r \right) + (\cos \gamma \cos \theta - \cos \alpha \cos \bar{\omega}) \left(y + \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} r \right) + (\cos \alpha \cos \omega - \cos \beta \cos \theta) z \left. \vphantom{\frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} r} \right\} = 0.$$

Die Durchschnittslinie dieser Ebene mit der Tafel ist das Bild oder die Projection der ersten durch den Punkt (uvw) gelegten, durch die Gleichungen 17) charakterisirten Geraden, und die Gleichung dieses Bildes oder dieser Projection ist also:

$$23) \dots \dots \left\{ \begin{aligned} &(\cos \beta \cos \bar{\omega} - \cos \gamma \cos \omega) \left(x + \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} r \right) \\ &+ (\cos \gamma \cos \theta - \cos \alpha \cos \bar{\omega}) \left(y + \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} r \right) \end{aligned} \right\} = 0$$

oder:

des Bildes der durch den Punkt (uvw) gelegten, durch die Gleichungen 17) charakterisirten Geraden entsprechen sollen, welcher als das Bild des Theils dieser Geraden zu betrachten ist, dem die Winkel θ , ω , $\bar{\omega}$ entsprechen. Diese Frage kann auf folgende Art beantwortet werden.

Von dem Punkte (uvw) aus schneiden wir auf dem durch die Winkel θ , ω , $\bar{\omega}$ bestimmten Theile der durch diesen Punkt gelegten, durch die Gleichungen 17) charakterisirten Geraden ein beliebiges Stück R ab, und bezeichnen durch X , Y , Z die Coordinaten des Endpunkts dieses Stücks; so ist:

$$X = -2r \cos \alpha \cos \gamma + R \cos \theta,$$

$$Y = -2r \cos \beta \cos \gamma + R \cos \omega,$$

$$Z = -r \cos 2\gamma + R \cos \bar{\omega} = -r(2\cos^2 \gamma - 1) + R \cos \bar{\omega}.$$

Von dem Auge ziehen wir nach dem Punkte (XYZ) eine Gerade, bezeichnen deren Durchschnittspunkt mit dem Bilde der durch den Punkt (uvw) gelegten, durch die Gleichungen 17) charakterisirten Geraden durch ($X'Y'Z'$), und die Entfernung dieses Punktes von dem Punkte ($u'r'w'$) durch R' ; so ist:

$$X' = -\frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} r + R' \cos \theta',$$

$$Y' = -\frac{\cos \beta}{\cos \gamma} r + R' \cos \omega',$$

$$Z' = 0.$$

Die Gleichungen der durch das Auge und den Punkt (XYZ) gelegten Geraden sind:

$$\frac{x}{X} = \frac{y}{Y} = \frac{z-r}{Z-r},$$

und es ist also:

$$\frac{X'}{X} = \frac{Y'}{Y} = -\frac{r}{Z-r},$$

woraus:

$$X' = -\frac{rX}{Z-r}, \quad Y' = -\frac{rY}{Z-r}$$

folgt; also nach dem Obigen:

$$X' = -\frac{2r \cos \alpha \cos \gamma - R \cos \theta}{2r \cos^2 \gamma - R \cos \bar{\omega}} r, \quad Y' = -\frac{2r \cos \beta \cos \gamma - R \cos \omega}{2r \cos^2 \gamma - R \cos \bar{\omega}} r.$$

Folglich ist nach dem Obigen:

Aus dem Punkte (uvw) lassen wir jetzt eine zweite auf dem nach (uvw) gezogenen Kugelhalbmesser senkrecht stehende Gerade ausgehen, und bezeichnen die von derselben mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel durch $\theta_1, \omega_1, \bar{\omega}_1$; so ist nach 27) für das Bild dieser Geraden:

$$29) \dots \left\{ \begin{array}{l} \cos \theta_1' = -\frac{\cos \alpha \cos \bar{\omega}_1 - \cos \gamma \cos \theta_1}{\cos \gamma}, \\ \cos \omega_1' = -\frac{\cos \beta \cos \bar{\omega}_1 - \cos \gamma \cos \omega_1}{\cos \gamma}, \\ \cos \bar{\omega}_1' = 0. \end{array} \right.$$

Bezeichnen wir ferner den von den beiden von (uvw) ausgehenden, durch die Winkel $\theta, \omega, \bar{\omega}$ und $\theta_1, \omega_1, \bar{\omega}_1$ bestimmten Geraden eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel durch Ω , den von den Bildern dieser beiden Geraden eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel durch Ω' , so ist:

$$\begin{aligned} \cos \Omega &= \cos \theta \cos \theta_1 + \cos \omega \cos \omega_1 + \cos \bar{\omega} \cos \bar{\omega}_1, \\ \cos \Omega' &= \cos \theta' \cos \theta_1' + \cos \omega' \cos \omega_1' + \cos \bar{\omega}' \cos \bar{\omega}_1'. \end{aligned}$$

Nun ist aber:

$$\begin{aligned} & (\cos \alpha \cos \bar{\omega} - \cos \gamma \cos \theta) (\cos \alpha \cos \bar{\omega}_1 - \cos \gamma \cos \theta_1) \\ & + (\cos \beta \cos \bar{\omega} - \cos \gamma \cos \omega) (\cos \beta \cos \bar{\omega}_1 - \cos \gamma \cos \omega_1) \\ = & (\cos \alpha^2 + \cos \beta^2) \cos \bar{\omega} \cos \bar{\omega}_1 \\ & + \cos \gamma^2 (\cos \theta \cos \theta_1 + \cos \omega \cos \omega_1) \\ & - (\cos \alpha \cos \theta + \cos \beta \cos \omega) \cos \gamma \cos \bar{\omega}_1 \\ & - (\cos \alpha \cos \theta_1 + \cos \beta \cos \omega_1) \cos \gamma \cos \bar{\omega} \\ = & (\cos \alpha^2 + \cos \beta^2) \cos \bar{\omega} \cos \bar{\omega}_1 \\ & + \cos \gamma^2 (\cos \theta \cos \theta_1 + \cos \omega \cos \omega_1) \\ & - (\cos \alpha \cos \theta + \cos \beta \cos \omega + \cos \gamma \cos \bar{\omega}) \cos \gamma \cos \bar{\omega}_1 \\ & - (\cos \alpha \cos \theta_1 + \cos \beta \cos \omega_1 + \cos \gamma \cos \bar{\omega}_1) \cos \gamma \cos \bar{\omega} \\ & + 2 \cos \gamma^2 \cos \bar{\omega} \cos \bar{\omega}_1 \\ = & (\cos \alpha^2 + \cos \beta^2 + \cos \gamma^2) \cos \bar{\omega} \cos \bar{\omega}_1 \\ & + \cos \gamma^2 (\cos \theta \cos \theta_1 + \cos \omega \cos \omega_1 + \cos \bar{\omega} \cos \bar{\omega}_1) \\ & - (\cos \alpha \cos \theta + \cos \beta \cos \omega + \cos \gamma \cos \bar{\omega}) \cos \gamma \cos \bar{\omega}_1 \\ & - (\cos \alpha \cos \theta_1 + \cos \beta \cos \omega_1 + \cos \gamma \cos \bar{\omega}_1) \cos \gamma \cos \bar{\omega} \\ = & \cos \gamma^2 (\cos \theta \cos \theta_1 + \cos \omega \cos \omega_1 + \cos \bar{\omega} \cos \bar{\omega}_1) \\ & - \frac{1}{2} \{ 2 (\cos \alpha \cos \theta + \cos \beta \cos \omega + \cos \gamma \cos \bar{\omega}) \cos \gamma - \cos \bar{\omega} \} \cos \bar{\omega}_1 \\ & - \frac{1}{2} \{ 2 (\cos \alpha \cos \theta_1 + \cos \beta \cos \omega_1 + \cos \gamma \cos \bar{\omega}_1) \cos \gamma - \cos \bar{\omega}_1 \} \cos \bar{\omega} \\ = & \cos \gamma^2 (\cos \theta \cos \theta_1 + \cos \omega \cos \omega_1 + \cos \bar{\omega} \cos \bar{\omega}_1) \end{aligned}$$

lorum, qui inter has lineas et axin abscissarum comprehenduntur, litteris t et θ ex ordine designantur, inveniuntur aequationes

$$\begin{aligned} \text{lineae per } A \text{ ductae } y - y_1 &= t(x - x_1), \\ \text{,, ,, } B \text{ ,, } y - y_2 &= t(x - x_2), \\ \text{,, ,, } C \text{ ,, } y - y_3 &= \theta(x - x_3), \\ \text{,, ,, } D \text{ ,, } y - y_4 &= \theta(x - x_4). \end{aligned}$$

Coordinatae punctorum, ubi linea prima tertiam et quartam secat, sunt:

$$\begin{aligned} \xi_{1,3} &= \frac{tx_1 - \theta x_3 + y_3 - y_1}{t - \theta}, & \eta_{1,3} &= \frac{t\theta(x_1 - x_3) + ty_3 - \theta y_1}{t - \theta}, \\ \xi_{1,4} &= \frac{tx_1 - \theta x_4 + y_4 - y_1}{t - \theta}, & \eta_{1,4} &= \frac{t\theta(x_1 - x_4) + ty_4 - \theta y_1}{t - \theta}; \end{aligned}$$

e quibus posteriores substituendis x_4, y_4 pro x_3, y_3 inventae sunt.

Coordinae puncti, ubi secunda linea tertiam secat, inveniuntur, si in prioribus x_1, y_1 in x_3, y_3 mutantur. Ita reperimus:

$$\xi_{2,3} = \frac{tx_3 - \theta x_3 + y_3 - y_3}{t - \theta}, \quad \eta_{2,3} = \frac{t\theta(x_3 - x_3) + ty_3 - \theta y_3}{t - \theta}.$$

vel si brevitatis causa ponimus:

$$A_1 = (x_3 - x_4)(y_3 - y_1),$$

$$B_1 = (x_1 - x_2)(x_3 - x_4) + (y_3 - y_1)(y_3 - y_4),$$

$$C_1 = (x_1 - x_2)(y_3 - y_4);$$

$$A_2 = (x_3 - x_4)(y_3 - y_1),$$

$$B_2 = (x_1 - x_2)(x_3 - x_4) + (y_3 - y_1)(y_3 - y_4),$$

$$C_2 = (x_1 - x_2)(y_3 - y_4);$$

$$A_3 = (x_3 - x_2)(y_4 - y_1),$$

$$B_3 = (x_1 - x_4)(x_3 - x_2) + (y_4 - y_1)(y_3 - y_2),$$

$$C_3 = (x_1 - x_4)(y_3 - y_2):$$

$$R_1 = \pm \frac{A_1 + B_1 t + C_1 t^2}{1 + t^2}, \quad (4)$$

$$R_2 = \pm \frac{A_2 + B_2 t + C_2 t^2}{1 + t^2}, \quad (5)$$

$$R_3 = \pm \frac{A_3 + B_3 t + C_3 t^2}{1 + t^2}. \quad (6)$$

Numquid rectangulum sit maximum aut minimum, jam quaeramus. Si primum R_1 consideramus, differentiando inveniemus:

$$\frac{dR_1}{dt} = \pm \frac{B_1 + 2(C_1 - A_1)t - B_1 t^2}{(1 + t^2)^2}.$$

Posita $\frac{dR_1}{dt} = 0$, invenitur:

$$t = \frac{1}{B_1} \{ C_1 - A_1 \pm \sqrt{(C_1 - A_1)^2 + B_1^2} \}.$$

Repetita differentiatio, quum termini, qui propter aequationem $\frac{dR_1}{dt} = 0$ evanescunt, negliguntur, dat:

$$\frac{d^2 R_1}{dt^2} = \pm \frac{2(C_1 - A_1 - B_1 t)}{(1 + t^2)^2}.$$

Si valores inventi in (4) introducuntur, reductionibus quibusdam factis, prodeunt:

$$R_1' = \frac{1}{2}(C_1 + A_1 + \sqrt{(C_1 - A_1)^2 + B_1^2}),$$

$$R_1'' = -\frac{1}{2}(C_1 + A_1 - \sqrt{(C_1 - A_1)^2 + B_1^2}).$$

Signa ita sumenda esse, ex eo intelligitur, quod est

$$(C_1 - A_1)^2 + B_1^2 > (C_1 + A_1)^2 \text{ vel } B_1^2 > 4A_1C_1,$$

d **Q**uod valoribus quantitatum A_1, B_1, C_1 considerandis elucet. **J**am sequitur, ut in $\frac{d^2R_1}{dt^2}$ signum superius pro priore valore ipsius, **S**ed signum inferius pro posteriore eligendum sit. In utraque **g**itur re evadit $\frac{d^2R_1}{dt^2} < 0$, atque ideo est et R_1' et R_1'' maximum. **M**inimum non esse etiam sine calculo patet, quia lineae ita duci **p**ossunt, ut nullum rectangulum prodeat.

Permutandis indicibus, maxima rectangulorum R_2 et R_3 **i**nveniuntur.

Jam quaeramus, quando rectangula, de quibus agitur, in **q**uadrata transeant. Tum est

$$\{t(x_1 - x_2) + y_2 - y_1\}^2 = \{t(y_3 - y_4) + x_3 - x_4\}^2,$$

unde invenitur:

$$t' = \frac{x_3 - x_4 + y_1 - y_2}{x_1 - x_2 - y_3 + y_4},$$

$$t'' = -\frac{x_3 - x_4 - y_1 + y_2}{x_1 - x_2 + y_3 - y_4}.$$

Itaque sunt latera quadratorum, his valoribus respondentium:

$$\sigma_1' = \pm \frac{(x_1 - x_2)(x_3 - x_4) + (y_1 - y_2)(y_3 - y_4)}{x_1 - x_2 - y_3 + y_4},$$

$$\sigma_1'' = \pm \frac{(x_1 - x_2)(x_3 - x_4) + (y_1 - y_2)(y_3 - y_4)}{x_1 - x_2 + y_3 - y_4}.$$

Si prius x_3, y_3 , deinde x_4, y_4 pro x_2, y_2 et contra posuerimus, **q**uadrata inveniemus. Itaque sex omnino sunt quadrata, quorum latera per quattuor puncta data transeant. Cfr. Clausen in **h**oc Arch. Tom XV. pag. 238.

XXV.**Uebungsaufgaben für Schüler.**

Von Herrn Dr. Christian Fr. Lindman in Strengnäs in Schweden.

1. Invenire terminum generalem et summam seriei $n+1$ terminorum

$$1 + \frac{3}{4} + \frac{11}{16} + \frac{43}{64} + \dots$$

2. Omnis numerus formae $2^{2p+1} + 1$ et formae $2^{2p} - 1$ per 3 divisibilis esse demonstratur.

3. E tribus punctis datis (in eadem linea non jacentibus) ut centris tres circulos describere, qui tres tangentes communes habeant.

XXVI.**M i s c e l l e n.****Geometrischer Satz.**

Von dem Herausgeber.

In einem mit dem Halbmesser r beschriebenen Kreise sei eine Sehne $AB = s$ gezogen, welche den Kreis in zwei Abschnitte theilt. Ueber dieser Sehne $AB = s$ als Grundlinie beschreibe man in die beiden Abschnitte Dreiecke und bestimme die Durchschnittspunkte der Höhen derselben. Man soll den geometrischen Ort dieser Durchschnittspunkte finden.

$$1 + \frac{x(x-2a)}{y^2} + \frac{2b}{y} = 0$$

oder

$$x^2 + y^2 - 2ax + 2by = 0,$$

oder

$$x^2 + y^2 = 2ax - 2by,$$

d. i., weil $a^2 + b^2 = r^2$ ist, wie man leicht findet:

$$(x-a)^2 + (y+b)^2 = r^2.$$

Folglich ist der Ort ein mit dem Halbmesser r aus dem durch die Coordinaten $a, -b$ bestimmten Mittelpunkte beschriebener Kreis.

Ist e die Entfernung des Durchschnittspunkts der drei Höhen des oben betrachteten Dreiecks von dessen Spitze S , so ist:

$$e^2 = (x-r)^2 + (y-\eta)^2 = (y-\eta)^2,$$

also nach dem Obigen:

$$e^2 = \left\{ y + \frac{(x-2a)x}{y} \right\}^2 = \frac{(x^2 + y^2 - 2ax)^2}{y^2},$$

und folglich, weil

$$x^2 + y^2 - 2ax = -2by$$

ist:

$$e^2 = 4b^2, \quad e = \pm 2b;$$

indem man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem b positiv oder negativ ist. Also ist e eine constante Grösse.

Von dem Herausgeber.

Um die beiden Gleichungen

$$x - y = a, \quad x^2 - y^2 = a^2$$

aufzulösen, setze man

$$x + y = u;$$

so ist:

$$2x = u + a, \quad 2y = u - a;$$

also:

$$2(x^2 - y^2) = u^3 a + u a^3,$$

und folglich

$$2a^4 = u^3a + ua^3, \quad 2a^3 = u(a^2 + u^2)$$

oder:

$$\frac{u}{a} \left\{ 1 + \left(\frac{u}{a} \right)^2 \right\} = 2.$$

Eine Wurzel dieser Gleichung ist offenbar $\frac{u}{a} = 1$, und dividirt man nun mit $\frac{u}{a} - 1$ in $\left(\frac{u}{a} \right)^3 + \frac{u}{a} - 2$ hinein, so erhält man zur Bestimmung der beiden anderen Wurzeln die Gleichung:

$$\left(\frac{u}{a} \right)^2 + \frac{u}{a} + 2 = 0,$$

durch deren Auflösung sich

$$\frac{u}{a} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{-7} = -\frac{1}{2} (1 \mp \sqrt{-7})$$

ergiebt, so dass also die beiden anderen Wurzeln imaginär sind.

Wendet man auf die Gleichung

$$\left(\frac{u}{a} \right)^3 + \frac{u}{a} - 2 = 0$$

die cardanische Formel an, so erhält man:

$$\frac{u}{a} = \sqrt[3]{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{1 + \frac{1}{27}}}.$$

oder:

$$\frac{u}{a} = \sqrt[3]{1 + \sqrt{\frac{28}{27}}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{\frac{28}{27}}}.$$

Diese Wurzel ist reell, und da nun nach dem Obigen die Gleichung nur eine der Einheit gleiche reelle Wurzel hat, so ist

$$\sqrt[3]{1 + \sqrt{\frac{28}{27}}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{\frac{28}{27}}} = 1.$$

Wie ist die Richtigkeit dieser Gleichung auf andere Art leicht nachzuweisen?

Die Bestimmung von x und y ergibt sich aus dem Obigen von selbst.

Durch Rechnung mit Logarithmen verificirt man vorstehende Gleichung leicht wie folgt:

$$\log 28 = 1,4471580$$

$$\log 27 = 1,4313638$$

$$\log \frac{28}{27} = 0,0157942$$

$$\log \sqrt{\frac{28}{27}} = 0,0078971$$

$$\sqrt{\frac{28}{27}} = 1,018350$$

$$1 + \sqrt{\frac{28}{27}} = 2,018350$$

$$1 - \sqrt{\frac{28}{27}} = -0,018350$$

$$\log(1 + \sqrt{\frac{28}{27}}) = 0,3049965$$

$$\log(1 - \sqrt{\frac{28}{27}}) = 0,2636361 - 2_n$$

$$\log \sqrt[3]{1 + \sqrt{\frac{28}{27}}} = 0,1016655$$

$$\log \sqrt[3]{1 - \sqrt{\frac{28}{27}}} = 0,4212120 - 1_n$$

$$\sqrt[3]{1 + \sqrt{\frac{28}{27}}} = 1,263763$$

$$\sqrt[3]{1 - \sqrt{\frac{28}{27}}} = -0,263762$$

$$\sqrt[3]{1 + \sqrt{\frac{28}{27}}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{\frac{28}{27}}} = 1,000001.$$

Von dem Herausgeber.

Ein dem Wesentlichen nach bekannter Beweis des Ausdruc von Wallis für π lässt sich mit besonderer Strenge auf folgen Art darstellen.

Aus der bekannten Reductionsformel

$$\int \sin x^n dx = -\frac{1}{n} \sin x^{n-1} \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin x^{n-2} dx$$

ergibt sich sogleich:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x^n dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x^{n-2} dx,$$

woraus man, wenn der Kürze wegen

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x^n dx$$

gesetzt wird, die Relation

$$J_n = \frac{n-1}{n} J_{n-2}$$

erhält.

Ist nun zuerst n eine gerade Zahl, also etwa $n=2\mu$, so ist:

$$J_{2\mu} = \frac{2\mu-1}{2\mu} J_{2\mu-2},$$

$$J_{2\mu-2} = \frac{2\mu-3}{2\mu-2} J_{2\mu-4},$$

$$J_{2\mu-4} = \frac{2\mu-5}{2\mu-4} J_{2\mu-6},$$

u. s. w.

$$J_4 = \frac{3}{4} J_2,$$

$$J_2 = \frac{1}{2} J_0;$$

also durch Multiplication:

$$J_{2\mu} = \frac{1.3.5.7 \dots (2\mu-1)}{2.4.6.8 \dots 2\mu} J_0,$$

und folglich, weil

$$J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$$

ist:

$$J_{2\mu} = \frac{1.3.5.7 \dots (2\mu-1)}{2.4.6.8 \dots 2\mu} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Ist ferner n eine ungerade Zahl, etwa $n=2\mu+1$, so ist:

$$J_{2\mu+1} = \frac{2\mu}{2\mu+1} J_{2\mu-1},$$

$$J_{2\mu-1} = \frac{2\mu-2}{2\mu-1} J_{2\mu-3},$$

$$J_{2\mu-3} = \frac{2\mu-4}{2\mu-3} J_{2\mu-5},$$

u. s. w.

$$J_5 = \frac{4}{5} J_3,$$

$$J_3 = \frac{2}{3} J_1;$$

also durch Multiplication:

$$J_{2\mu+1} = \frac{2.4.6.8\dots 2\mu}{3.5.7.9\dots (2\mu+1)} J_1,$$

und folglich, weil offenbar

$$J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1$$

ist:

$$J_{2\mu+1} = \frac{2.4.6.8\dots 2\mu}{3.5.7.9\dots (2\mu+1)}.$$

Zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ ist allgemein:

$$\sin x^n > \sin x^{n+1},$$

also, nach dem bekannten Hauptsatze von den bestimmten Integralen offenbar:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x^n dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x^{n+1} dx$$

oder in der obigen Bezeichnung allgemein $J_n > J_{n+1}$, folglich:

$$J_{2\mu} > J_{2\mu+1},$$

und daher nach dem Obigen:

$$\frac{1.3.5.7\dots (2\mu-1)}{2.4.6.8\dots 2\mu} \cdot \frac{\pi}{2} > \frac{2.4.6.8\dots 2\mu}{3.5.7.9\dots (2\mu+1)},$$

woraus:

$$\frac{\pi}{2} > \frac{2.2.4.4.6.6\dots 2\mu.2\mu}{1.3.3.5.5.7\dots (2\mu-1)(2\mu+1)}$$

oder:

$$\frac{\pi}{2} > \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2\mu}{2\mu-1} \cdot \frac{2\mu}{2\mu+1}.$$

Ferner ist nach dem Obigen:

$$J_{2\mu+2} < J_{2\mu+1},$$

also:

$$\frac{1.3.5.7\dots (2\mu+1)}{2.4.6.8\dots (2\mu+2)} \cdot \frac{\pi}{2} < \frac{2.4.6.8\dots 2\mu}{3.5.7.9\dots (2\mu+1)},$$

woraus:

$$\frac{\pi}{2} < \frac{2.2.4.4.6.6\dots 2\mu.(2\mu+2)}{1.3.3.5.5.7\dots (2\mu+1)(2\mu+1)}$$

oder:

punkt ist. Ich zog nämlich die zweite Diagonale des Vierecks, wodurch das Viereck aufs Neue in zwei Dreiecke getheilt war, deren Schwerpunkte ich wieder durch eine gerade Linie verband, und also eine zweite Linie bekam, worauf der Schwerpunkt des Vierecks lag. Der Schwerpunkt selbst war daher völlig bestimmt. Das Gesetz von der Gleichheit der Momente bewährte sich in der That, wie folgende Rechnung zeigt.

Schneiden sich die beiden Diagonalen AC und BD des Vierecks $ABCD$ (Taf. IV. Fig. 1.) im Punkte a , nehmen wir $Ab = Cb$, $Ac = Bc$, $Cd = Dd$, $Be = De$; so ist der Durchschnittspunkt o von Bb und Cc der Schwerpunkt des Dreiecks ABC ; p (Durchschnittspunkt von Ad und Db) der Schwerpunkt des Dreiecks ACD ; deshalb op eine Schwerlinie des Vierecks; q (Durchschnittspunkt von Ae und Dc) der Schwerpunkt des Dreiecks ABD , und endlich r (Durchschnittspunkt von Bd und Ce) der Schwerpunkt des Dreiecks BCD ; daher ist qr die zweite Schwerlinie des Vierecks. Der Punkt z , in welchem sich op und qr schneiden, ist mithin der Schwerpunkt des Vierecks.

Nun ist bekanntlich $Bb = 3ob$, $Db = 3pb$, folglich $op \parallel BD$; op schneide die Diagonale AC in f , so haben wir denn auch: $Ba = 3of$, $Da = 3pf$; ebenso schneiden sich qr und BD im Punkte g , $qr \parallel AC$, $Aa = 3qg$, $Ca = 3rg$; das Viereck $afzg$ ist also ein Parallelogramm.

Weiter haben wir:

$$\Delta ABC : \Delta ACD = Ba : Da = of : pf.$$

$$pz = pf - fz = \frac{1}{3}Da - ag,$$

$$oz = of + fz = \frac{1}{3}Ba + ag.$$

Daher:

$$pz : oz = Da - 3ag : Ba + 3ag,$$

aber

$$Da - 3ag = De + ae - 2ae = Be - ae = Ba,$$

$$Ba + 3ag = Be - ae + 2ae = De + ae = Da;$$

folglich:

$$pz : oz = Ba : Da.$$

Wir erhalten also, was wir suchten:

$$\Delta ABC : \Delta ACD = pz : oz,$$

$$\text{Viereck } CDEF : \triangle CDF = ab : ao$$

$$\triangle CDF : \text{Viereck } ABCF = pq : bq$$

$$\text{also: } \frac{\text{Viereck } CDEF : \text{Viereck } ABCF = ab \times pq : ao \times bq.}{}$$

Da wieder aq Transversale des Dreiecks po ist, so haben wir:

$$ab \times pq \times zo = ao \times bq \times pz,$$

oder:

$$ab \times pq : ao \times bq = pz : oz;$$

daher:

$$\text{Viereck } CDEF : \text{Viereck } ABCF = pz : zo.$$

Wir haben aber auch:

$$\text{Fünfeck } ABCDF : \triangle CDF = bp : pq$$

$$\triangle CDF : \triangle DEF = ao : bo$$

$$\text{Fünfeck } ABCDF : \triangle DEF = bp \times ao : pq \times bo.$$

Nun betrachte man das Dreieck abq mit dessen Transversale po , wodurch sich ergibt:

$$ao \times bp \times qz = bo \times pq \times az,$$

oder:

$$bp \times ao : pq \times bo = az : qz;$$

so dass wir wieder erhalten:

$$\text{Fünfeck } ABCDF : \triangle DEF = az : qz.$$

In dem Sechseck giebt es neun Schwerlinien, welche sich im Punkte z schneiden, denn man kann dasselbe auf sechs Arten in ein Dreieck und ein Fünfeck, und auf drei Arten in zwei Vierecke zerlegen.

Auch kann man den Schwerpunkt zweier von einander entfernten, obgleich in der nämlichen Ebene liegenden Dreiecke finden, wofür ich ein neues Sechseck gezeichnet habe (Taf. IV. Fig. 4.), weil in Taf. IV. Fig. 3. alle zu suchenden Schwerpunkte einander so nahe kommen, dass die Linien schwer zu unterscheiden sein würden.

In Taf. IV. Fig. 4. habe ich die Schwerpunkte nicht construiert, sondern nur gewählt, welches aber der Beweisführung nicht schadet, wie man sehen wird. Sei denn:

$$\Delta ABC = \Delta HEF \times \cos S,$$

$$\Delta ACD = \Delta HGF \times \cos S;$$

daher:

$$\Delta ABC : \Delta ACD = \Delta HEF : \Delta HGF;$$

aber wir haben auch:

$$\Delta ABC : \Delta ACD = pz : qz,$$

$$\Delta HEF : \Delta HGF = p_1 z_1 : q_1 z_1;$$

folglich

$$pz : qz = p_1 z_1 : q_1 z_1.$$

Nun sind pp_1 und qq_1 parallel, deshalb auch zz_1 parallel zu pp_1 und qq_1 .

Bezeichnen wir den Inhalt des abgestumpften vierseitigen Prismas mit V , so ist nach dem in II. Bewiesenen:

$$V = \Delta ABC \times qq_1 + \Delta ACD \times qq_1.$$

Nun haben wir in §. 1. bewiesen:

$$\text{Viereck } ABCD : pq = \Delta ABC : zp = \Delta ACD : zq;$$

oder:

$$\Delta ABC = \text{Viereck } ABCD \times \frac{zp}{pq},$$

$$\Delta ACD = \text{Viereck } ABCD \times \frac{zq}{pq};$$

so dass wir bekommen:

$$V = \text{Viereck } ABCD \times \frac{zp \times qq_1 + zq \times pp_1}{pq}$$

$$= \text{Viereck } ABCD \times \frac{pq \times zz_1}{pq} \text{ (siehe §. 3., III.):}$$

endlich:

$$V = \text{Viereck } ABCD \times zz_1.$$

Man sieht leicht ein, dass, wenn die parallelen Kanten nicht senkrecht auf der Basis sind, man auch hier eine Ebene senkrecht auf die parallelen Kanten legen kann. Nunmehr hat es nicht die mindeste Schwierigkeit, den Satz auf ein beliebiges abgestumpftes Prisma auszudehnen. Der Gang des Beweises selbst zeigt die Allgemeinheit, so dass wir vollkommen sicher den Satz aufstellen können:

$$|e \pm i(x^2 + y^2 \mp a \mp b)|^2 = \frac{(x^2 + y^2 \mp a \mp b)^2 \pm 4(bx^2 + ay^2 \mp ab)}{4}$$

ergibt.

Den Zähler

$$(x^2 + y^2 \mp a \mp b)^2 \pm 4(bx^2 + ay^2 \mp ab)$$

bringt man leicht auf die Form:

$$(x^2 + y^2)^2 \mp (a - b)\{2(x^2 - y^2) \mp (a - b)\},$$

also auf eine der beiden Formen:

$$(x^2 + y^2)^2 \mp (a - b)\{2(x^2 + y^2) - 4y^2 \mp (a - b)\},$$

$$(x^2 + y^2)^2 \mp (a - b)\{-2(x^2 + y^2) + 4x^2 \mp (a - b)\};$$

oder:

$$(x^2 + y^2)^2 \mp 2(a - b)(x^2 + y^2) + (a - b)^2 \pm 4(a - b)y^2,$$

$$(x^2 + y^2)^2 \pm 2(a - b)(x^2 + y^2) + (a - b)^2 \mp 4(a - b)x^2;$$

also:

$$\{(x^2 + y^2) \mp (a - b)\}^2 \pm 4(a - b)y^2,$$

$$\{(x^2 + y^2) \pm (a - b)\}^2 \mp 4(a - b)x^2.$$

Betrachten wir nun zuerst die Gleichung:

$$5) \dots \dots \dots \frac{x^2}{\varrho - a} + \frac{y^2}{\varrho - b} + 1 = 0,$$

so ist nach 4):

$$6) \dots \varrho = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 - a - b) \\ \pm \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\{(x^2 + y^2) - (a - b)\}^2 + 4(a - b)y^2} \\ \sqrt{\{(x^2 + y^2) + (a - b)\}^2 - 4(a - b)x^2} \end{array} \right\};$$

woraus zuvörderst erhellet, dass die Wurzeln stets reell sind, weil, wenn $a - b$ positiv oder negativ ist, respective $+4(a - b)y^2$ oder $-4(a - b)x^2$ positiv ist.

Setzen wir nun:

$$7) \dots \dots N = \left\{ \begin{array}{l} \{(x^2 + y^2) - (a - b)\}^2 + 4(a - b)y^2 \\ \{(x^2 + y^2) + (a - b)\}^2 - 4(a - b)x^2 \end{array} \right.$$

und bezeichnen die beiden Wurzeln, so wie sie durch das obere und untere Zeichen in der Formel 6) bestimmt werden, respective durch λ und μ ; so ist nach 6):

$$8) \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \lambda = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 - a - b) + \frac{1}{2}\sqrt{N}, \\ \mu = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 - a - b) - \frac{1}{2}\sqrt{N}; \end{array} \right.$$

also:

$$\lambda - \mu = \sqrt{N}, \text{ folglich } \lambda > \mu;$$

so dass also das obere Zeichen in 6) immer die grössere Wurzel liefert.

Leicht findet man:

$$a - \left\{ -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 - a - b) \pm \frac{1}{2}\sqrt{N} \right\} = \frac{1}{2}\{(a - b) + (x^2 + y^2) \mp \sqrt{N}\}, \\ b - \left\{ -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 - a - b) \pm \frac{1}{2}\sqrt{N} \right\} = \frac{1}{2}\{-(a - b) + (x^2 + y^2) \mp \sqrt{N}\};$$

und folglich, wie sich sogleich durch leichte Multiplication ergibt:

$$4\{a - [-\frac{1}{2}(x^2 + y^2 - a - b) \pm \frac{1}{2}\sqrt{N}]\}\{b - [-\frac{1}{2}(x^2 + y^2 - a - b) \pm \frac{1}{2}\sqrt{N}]\} \\ = (x^2 + y^2 \mp \sqrt{N})^2 - (a - b)^2 \\ = \{(x^2 + y^2) + (a - b) \mp \sqrt{N}\}\{(x^2 + y^2) - (a - b) \mp \sqrt{N}\}.$$

Also ist offenbar:

Aus der ersten Vergleichung folgt:

$$a \leq \lambda \leq b;$$

wäre aber

$$a < \lambda < b,$$

so wäre $a < b$, da doch nach der Voraussetzung $a > b$ ist; also ist:

$$a > \lambda > b.$$

Aus der zweiten Vergleichung folgt:

$$a \leq \mu \leq b;$$

wäre aber

$$a < \mu < b,$$

so wäre wegen des Vorhergehenden $\lambda < \mu$, da doch nach dem Obigen $\lambda > \mu$ ist; also ist:

$$a > \mu < b.$$

Daher haben wir die folgenden Vergleichungen:

$$a > \lambda > b, \quad a > \mu < b;$$

also:

$$a > \lambda > b, \quad b > \mu > -\infty.$$

Wenn $a < b$, also $a - b < 0$ ist, so ist

$$(x^2 + y^2) - (a - b) > 0.$$

Nach 7) ist in diesem Falle offenbar:

$$\{(x^2 + y^2) + (a - b)\}^2 < N < \{(x^2 + y^2) - (a - b)\}^2,$$

und folglich, weil hiernach \sqrt{N} grösser als der absolute Werth von

$$(x^2 + y^2) + (a - b)$$

ist:

$$(x^2 + y^2) + (a - b) - \sqrt{N} < 0, \quad (x^2 + y^2) - (a - b) - \sqrt{N} > 0;$$

$$(x^2 + y^2) + (a - b) + \sqrt{N} > 0, \quad (x^2 + y^2) - (a - b) + \sqrt{N} > 0;$$

also nach dem Obigen:

$$(a - \lambda)(b - \lambda) < 0, \quad (a - \mu)(b - \mu) > 0.$$

Aus der ersten Vergleichung folgt:

$$a \lesseqgtr \lambda \lesseqgtr b;$$

wäre aber

$$a > \lambda > b,$$

so wäre $a > b$, da doch nach der Voraussetzung $a < b$ ist; also ist:

$$a < \lambda < b.$$

Aus der zweiten Vergleichung folgt:

$$a \lesseqgtr \mu \gtrless b;$$

wäre aber

$$a < \mu > b,$$

so wäre wegen des Vorhergehenden $\lambda < \mu$, da doch nach dem Obigen $\lambda > \mu$ ist; also ist:

$$a > \mu < b.$$

Daher haben wir die folgenden Vergleichungen:

$$a < \lambda < b, \quad a > \mu < b;$$

Setzen wir nun:

$$11) \dots N' = \begin{cases} \{(x^2 + y^2) + (a - b)\}^2 - 4(a - b)y^2 \\ \{(x^2 + y^2) - (a - b)\}^2 + 4(a - b)x^2 \end{cases}$$

und bezeichnen die beiden Wurzeln, so wie sie durch das obere und untere Zeichen in der Formel 10) bestimmt werden, respective durch λ und μ ; so ist nach 10):

$$12) \dots \dots \dots \begin{cases} \lambda = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + a + b) + \frac{1}{2}\sqrt{N'}, \\ \mu = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + a + b) - \frac{1}{2}\sqrt{N'}; \end{cases}$$

also:

$$\lambda - \mu = \sqrt{N'}, \text{ folglich } \lambda > \mu;$$

so dass also das obere Zeichen in 10) immer die grössere Wurzel liefert.

Leicht findet man:

$$a - \left\{ \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + a + b) \pm \frac{1}{2}\sqrt{N'} \right\} = \frac{1}{2} \{ (a - b) - (x^2 + y^2) \mp \sqrt{N'} \},$$

$$b - \left\{ \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + a + b) \pm \frac{1}{2}\sqrt{N'} \right\} = \frac{1}{2} \{ -(a - b) - (x^2 + y^2) \mp \sqrt{N'} \};$$

und folglich, wie sich sogleich durch leichte Multiplication ergibt:

$$\begin{aligned} 4 \{ a - [\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + a + b) \pm \frac{1}{2}\sqrt{N'}] \} \{ b - [\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + a + b) \pm \frac{1}{2}\sqrt{N'}] \} \\ = (x^2 + y^2 \pm \sqrt{N'})^2 - (a - b)^2 \\ = \{ (x^2 + y^2) + (a - b) \pm \sqrt{N'} \} \{ (x^2 + y^2) - (a - b) \pm \sqrt{N'} \}. \end{aligned}$$

Also ist offenbar:

$$\begin{aligned} & 4(a - \lambda)(b - \lambda) \\ &= \{ (x^2 + y^2) + (a - b) + \sqrt{N'} \} \{ (x^2 + y^2) - (a - b) + \sqrt{N'} \}, \\ & 4(a - \mu)(b - \mu) \\ &= \{ (x^2 + y^2) + (a - b) - \sqrt{N'} \} \{ (x^2 + y^2) - (a - b) - \sqrt{N'} \}. \end{aligned}$$

Wenn nun $a > b$, also $a - b > 0$ ist, so ist

$$(x^2 + y^2) + (a - b) > 0.$$

Nach 11) ist in diesem Falle offenbar:

$$\{ (x^2 + y^2) + (a - b) \}^2 > N' > \{ (x^2 + y^2) - (a - b) \}^2,$$

und folglich, weil hiernach $\sqrt{N'}$ grösser als der absolute Werth von

$$(x^2 + y^2) - (a - b)$$

ist:

$$(x^2 + y^2) + (a - b) + \sqrt{N'} > 0, \quad (x^2 + y^2) - (a - b) + \sqrt{N'} > 0;$$

$$(x^2 + y^2) + (a - b) - \sqrt{N'} > 0, \quad (x^2 + y^2) - (a - b) - \sqrt{N'} < 0;$$

also nach dem Obigen:

$$(a - \lambda)(b - \lambda) > 0, \quad (a - \mu)(b - \mu) < 0.$$

Aus der zweiten Vergleichung folgt:

$$a < \mu < b;$$

wäre aber

$$a < \mu < b,$$

so wäre $a < b$, da doch nach der Voraussetzung $a > b$ ist; also ist:

$$a > \mu > b.$$

Aus der ersten Vergleichung folgt:

$$a \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} \lambda \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} b;$$

wäre aber

$$a > \lambda < b,$$

so wäre wegen des Vorhergehenden $\lambda < \mu$, da doch nach dem Obigen $\lambda > \mu$ ist; also ist:

$$a < \lambda > b.$$

Daher haben wir die folgenden Vergleichungen:

$$a < \lambda > b, \quad a > \mu > b;$$

also:

$$a < \lambda < +\infty, \quad a > \mu > b.$$

Wenn $a < b$, also $a - b < 0$ ist, so ist

$$(x^2 + y^2) - (a - b) > 0.$$

Nach (11) ist in diesem Falle offenbar:

$$\{(x^2 + y^2) + (a - b)\}^2 < N' < \{(x^2 + y^2) - (a - b)\}^2,$$

und folglich, weil hiernach $\sqrt{N'}$ grösser als der absolute Werth von

$$(x^2 + y^2) + (a - b)$$

ist:

$$(x^2 + y^2) + (a - b) + \sqrt{N'} > 0, \quad (x^2 + y^2) - (a - b) + \sqrt{N'} > 0;$$

$$(x^2 + y^2) + (a - b) - \sqrt{N'} < 0, \quad (x^2 + y^2) - (a - b) - \sqrt{N'} > 0;$$

also nach dem Obigen:

$$(a - \lambda)(b - \lambda) > 0, \quad (a - \mu)(b - \mu) < 0.$$

Aus der zweiten Vergleichung folgt:

$$a \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} \mu \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} b;$$

wäre aber

$$a > \mu > b,$$

so wäre $a > b$, da doch nach der Voraussetzung $a < b$ ist; also ist:

$$a < \mu < b.$$

Aus der ersten Vergleichung folgt:

$$a \lesseqgtr \lambda \gtrless b;$$

wäre aber

$$a > \lambda < b,$$

so wäre nach dem Vorhergehenden $\lambda < \mu$, da doch nach dem Obigen $\lambda > \mu$ ist; also ist:

$$a < \lambda > b.$$

Daher haben wir die folgenden Vergleichungen:

$$a < \lambda > b, \quad a < \mu < b;$$

also:

$$b < \lambda < +\infty, \quad a < \mu < b.$$

Die beiden reellen Wurzeln unserer Gleichung liegen also im ersten Falle innerhalb der beiden durch die Grössen

$$b, a, +\infty$$

bestimmten Intervalle; im zweiten Falle innerhalb der beiden durch die Grössen

$$a, b, +\infty$$

bestimmten Intervalle.

Im ersten Falle ist:

$$\lambda > a > \mu > b,$$

im zweiten Falle dagegen:

$$a < \mu < b < \lambda.$$

§. 2.

Auch ohne die Gleichungen

$$\frac{x^2}{\varrho - a} + \frac{y^2}{\varrho - b} \pm 1 = 0$$

Ferner ist

$$f(-J) = -\frac{x^2}{J+a} - \frac{y^2}{J+b} + 1,$$

folglich $f(-J)$ positiv. Ist nun $a > b$, so liegen, da, weil $f(-J)$ positiv und nach dem Obigen offenbar $f(b-i)$ negativ ist, eine reelle Wurzel zwischen $-\infty$ und b liegt, zwei reelle Wurzeln in den beiden durch die Grössen

$$-\infty, b, a$$

bestimmten Intervallen. Ist dagegen $a < b$, so liegen, da, weil $f(-J)$ positiv und nach dem Obigen offenbar $f(a-i)$ negativ ist, eine reelle Wurzel zwischen $-\infty$ und a liegt, zwei reelle Wurzeln in den beiden durch die Grössen

$$-\infty, a, b$$

bestimmten Intervallen.

Betrachten wir ferner die Gleichung

$$\frac{x^2}{e-a} + \frac{y^2}{e-b} - 1 = 0,$$

und setzen der Kürze wegen

$$F(\varrho) = \frac{x^2}{\varrho - a} + \frac{y^2}{\varrho - b} - 1,$$

so ist:

$$F(a \mp i) = \mp \frac{x^2}{i} + \frac{y^2}{a - b \mp i} - 1,$$

$$F(b \pm i) = \frac{x^2}{b - a \pm i} \pm \frac{y^2}{i} - 1;$$

und es haben also offenbar immer, es mag $a > b$ oder $a < b$ sein, $F(a \mp i)$ und $F(b \pm i)$ entgegengesetzte Vorzeichen, woraus sich ergibt, dass zwischen a und b immer eine reelle Wurzel liegt. Ferner ist

$$F(+J) = \frac{x^2}{J - a} + \frac{y^2}{J - b} - 1,$$

folglich $F(+J)$ negativ. Ist nun $a > b$, so liegen, da, weil $F(a + i)$ nach dem Obigen offenbar positiv und $F(+J)$ negativ ist, eine reelle Wurzel zwischen a und $+\infty$ liegt, zwei reelle Wurzeln in den beiden durch die Grössen

$$b, a, +\infty$$

bestimmten Intervallen. Ist dagegen $a < b$, so liegen, da, weil nach dem Obigen $F(b + i)$ offenbar positiv und $F(+J)$ negativ ist, eine reelle Wurzel zwischen b und $+\infty$ liegt, zwei reelle Wurzeln in den beiden durch die Grössen

$$a, b, +\infty$$

bestimmten Intervallen.

Dass die beiden reellen Wurzeln unserer Gleichungen auch jederzeit im Allgemeinen ungleich sind, ergibt sich aus dem Vorhergehenden von selbst.

Alle diese Resultate stimmen mit den in §. I. gefundenen Resultaten vollkommen überein.

Weil, indem wir die obigen Bezeichnungen beibehalten, offenbar

$$\partial f(\varrho) = - \left\{ \left(\frac{x}{\varrho - a} \right)^2 + \left(\frac{y}{\varrho - b} \right)^2 \right\} \partial \varrho,$$

$$\partial F(\varrho) = - \left\{ \left(\frac{x}{\varrho - a} \right)^2 + \left(\frac{y}{\varrho - b} \right)^2 \right\} \partial \varrho$$

oder:

G

771

erg

Aus 15) erhält man durch partielle Differentiation nach λ und μ :

$$2x \frac{\partial x}{\partial \lambda} = \mp \frac{a-\mu}{a-b}, \quad 2x \frac{\partial x}{\partial \mu} = \mp \frac{a-\lambda}{a-b};$$

$$2y \frac{\partial y}{\partial \lambda} = \mp \frac{b-\mu}{b-a}, \quad 2y \frac{\partial y}{\partial \mu} = \mp \frac{b-\lambda}{b-a};$$

oder:

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = \mp \frac{x}{2} \cdot \frac{a-\mu}{a-b} \cdot \frac{1}{x^2}, \quad \frac{\partial x}{\partial \mu} = \mp \frac{x}{2} \cdot \frac{a-\lambda}{a-b} \cdot \frac{1}{x^2};$$

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda} = \mp \frac{y}{2} \cdot \frac{b-\mu}{b-a} \cdot \frac{1}{y^2}, \quad \frac{\partial y}{\partial \mu} = \mp \frac{y}{2} \cdot \frac{b-\lambda}{b-a} \cdot \frac{1}{y^2};$$

und folglich nach 15):

$$25) \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x}{\partial \lambda} = -\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{a-\lambda} = \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{\lambda-a}, \\ \frac{\partial x}{\partial \mu} = -\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{a-\mu} = \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{\mu-a}; \\ \frac{\partial y}{\partial \lambda} = -\frac{y}{2} \cdot \frac{1}{b-\lambda} = \frac{y}{2} \cdot \frac{1}{\lambda-b}, \\ \frac{\partial y}{\partial \mu} = -\frac{y}{2} \cdot \frac{1}{b-\mu} = \frac{y}{2} \cdot \frac{1}{\mu-b}. \end{array} \right.$$

Weil nun

$$\partial x = \frac{\partial x}{\partial \lambda} \partial \lambda + \frac{\partial x}{\partial \mu} \partial \mu, \quad \partial y = \frac{\partial y}{\partial \lambda} \partial \lambda + \frac{\partial y}{\partial \mu} \partial \mu$$

ist; so ist nach den vorstehenden Formeln:

$$26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial x = \frac{x}{2} \left(\frac{\partial \lambda}{\lambda - a} + \frac{\partial \mu}{\mu - a} \right), \\ \partial y = \frac{y}{2} \left(\frac{\partial \lambda}{\lambda - b} + \frac{\partial \mu}{\mu - b} \right). \end{array} \right.$$

Quadriert man diese Gleichungen und addirt sie dann zu ein
ander, so erhält man:

$$\begin{aligned} & 4(\partial x^2 + \partial y^2) \\ &= \left\{ \left(\frac{x}{\lambda - a} \right)^2 + \left(\frac{y}{\lambda - b} \right)^2 \right\} \partial \lambda^2 + \left\{ \left(\frac{x}{\mu - a} \right)^2 + \left(\frac{y}{\mu - b} \right)^2 \right\} \partial \mu^2 \\ &+ 2 \left\{ \frac{x^2}{(\lambda - a)(\mu - a)} + \frac{y^2}{(\lambda - b)(\mu - b)} \right\} \partial \lambda \partial \mu; \end{aligned}$$

folglich nach 22) und 19):

$$27) \quad 4(\partial x^2 + \partial y^2) = \mp \frac{\lambda - \mu}{(\lambda - a)(\lambda - b)} \partial \lambda^2 \mp \frac{\mu - \lambda}{(\mu - a)(\mu - b)} \partial \mu^2,$$

oder, wenn wir der Kürze wegen:

$$28) \quad \left\{ \begin{array}{l} L' = \mp \frac{\lambda - \mu}{4(\lambda - a)(\lambda - b)} = \mp \frac{\lambda - \mu}{4L}, \\ M' = \mp \frac{\mu - \lambda}{4(\mu - a)(\mu - b)} = \mp \frac{\mu - \lambda}{4M} \end{array} \right.$$

setzen:

$$29) \quad \partial x^2 + \partial y^2 = L' \partial \lambda^2 + M' \partial \mu^2.$$

§. 4.

Zunächst wollen wir nun im Allgemeinen untersuchen, welche
Curven unter der Voraussetzung, dass $a, b; \lambda, \mu$ gewisse con-
stante Grössen sind, dagegen x, y als veränderliche rechtwink-
lige Coordinaten betrachtet werden, die Gleichungen

$$\frac{x^2}{\lambda - a} + \frac{y^2}{\lambda - b} - 1 = 0, \quad \frac{x^2}{\mu - a} + \frac{y^2}{\mu - b} - 1 = 0$$

$$35) \dots L' = \frac{\lambda - \mu_0}{4(\lambda - a)(\lambda - b)} = \frac{\mu_0 - \lambda}{4(\lambda - a)(b - \lambda)},$$

so ist nach 29) allgemein:

$$\partial x^2 + \partial y^2 = L' \partial \lambda^2 = \frac{\mu_0 - \lambda}{4(\lambda - a)(b - \lambda)} \partial \lambda^2,$$

weil hier $\partial \mu$ verschwindet, da μ constant ist; und bezeichnen wir nun den von den Punkten $(x_0 y_0)$ und $(x_1 y_1)$ begränzten, den elliptischen Quadranten nicht übersteigenden Bogen durch s_{01} , so ist unter den gemachten Voraussetzungen offenbar:

$$s_{01} = \int_{x_0}^{x_1} \partial x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2},$$

Nun ist aber nach dem Vorhergehenden:

$$\partial x^2 \left\{ 1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \right\} = \frac{\mu_0 - \lambda}{4(\lambda - a)(b - \lambda)} \partial \lambda^2,$$

also, weil wegen der aus 25) bekannten Formel:

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{\lambda - a}$$

unter den gemachten Voraussetzungen ∂x und $\partial \lambda$ offenbar gleiche Vorzeichen haben:

$$\partial x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = \frac{1}{2} \partial \lambda \sqrt{\frac{\mu_0 - \lambda}{(\lambda - a)(b - \lambda)}},$$

und folglich nach dem Obigen:

$$36) \dots s_{01} = \frac{1}{2} \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \partial \lambda \sqrt{\frac{\mu_0 - \lambda}{(\lambda - a)(b - \lambda)}},$$

wo für λ_0 und λ_1 ihre Werthe aus 34), in Verbindung mit 33), zu setzen sind.

Will man den elliptischen Quadranten haben, den wir durch Q bezeichnen wollen, so muss man

$$x_0 = 0, y_0 = \sqrt{\mu_0 - b}; \quad x_1 = \sqrt{\mu_0 - a}, y_1 = 0$$

setzen, wofür man nach 33):

$$N_0' = \{(\mu_0 - b) - (a - b)\}^2 = (\mu_0 - a)^2,$$

$$N_1' = \{(\mu_0 - a) + (a - b)\}^2 = (\mu_0 - b)^2;$$

also:

$$\sqrt{N_0'} = \mu_0 - a, \quad \sqrt{N_1'} = \mu_0 - b$$

und folglich nach 34):

$$\lambda_0 = \frac{1}{2}\{(\mu_0 - b) + (a + b)\} - \frac{1}{2}(\mu_0 - a) = a,$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\{(\mu_0 - a) + (a + b)\} - \frac{1}{2}(\mu_0 - b) = b$$

erhält; also ist nach 36):

$$37) \dots\dots\dots Q = \frac{1}{2} \int_a^b \partial \lambda \sqrt{\frac{\mu_0 - \lambda}{(\lambda - a)(b - \lambda)}}.$$

Bezeichnet U den ganzen Umfang der Ellipse, so ist also:

$$38) \dots\dots\dots U = 2 \int_a^b \partial \lambda \sqrt{\frac{\mu_0 - \lambda}{(\lambda - a)(b - \lambda)}}.$$

§. 7.

Indem wir wiederum die durch die Gleichung 32) charakterisirte Ellipse betrachten, wollen wir das von den zweiten Coordinaten y_0, y_1 , der Axe der x und dem Umfange der Ellipse begänzte Flächenstück derselben zu bestimmen suchen, indem wir alle im vorhergehenden Paragraphen gebrauchten Bezeichnungen auch jetzt beibehalten. Bezeichnen wir das zu bestimmende Flächenstück durch F_{01} , so ist nach den Lehren der höheren Geometrie bekanntlich:

$$F_{01} = \int_{x_0}^{x_1} y \partial x.$$

Nach 15) ist:

$$y = \sqrt{\frac{(b - \lambda)(\mu_0 - b)}{b - a}},$$

und nach 25) und 15) ist:

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = \frac{1}{2(\lambda - a)} \sqrt{\frac{(\lambda - a)(\mu_0 - a)}{b - a}},$$

also

$$\partial x = \frac{\partial \lambda}{2(\lambda - a)} \sqrt{\frac{(\lambda - a)(\mu_0 - a)}{b - a}},$$

und folglich:

$$y\partial x = \frac{\partial\lambda}{2(\lambda-a)} \sqrt{\frac{(b-\lambda)(\mu_0-b)}{b-a}} \cdot \sqrt{\frac{(\lambda-a)(\mu_0-a)}{b-a}},$$

oder:

$$y\partial x = \frac{\sqrt{(\mu_0-a)(\mu_0-b)}}{2(b-a)} \cdot \partial\lambda \sqrt{\frac{b-\lambda}{\lambda-a}}.$$

Folglich ist nach dem Obigen, wenn λ_0, λ_1 ihre aus dem vorhergehenden Paragraphen bekannte Bedeutung behalten:

$$39) \dots F_{01} = \frac{\sqrt{(\mu_0-a)(\mu_0-b)}}{2(b-a)} \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \partial\lambda \sqrt{\frac{b-\lambda}{\lambda-a}}.$$

Bezeichnen wir den Flächeninhalt der ganzen Ellipse durch E , so ist, wenn wir wie im vorigen Paragraphen $\lambda_0 = a, \lambda_1 = b$ setzen:

$$40) \dots E = \frac{2\sqrt{(\mu_0-a)(\mu_0-b)}}{b-a} \int_a^b \partial\lambda \sqrt{\frac{b-\lambda}{\lambda-a}}.$$

Weil $\sqrt{\mu_0-a}$ und $\sqrt{\mu_0-b}$ die beiden Halbaxen der Ellipse sind, so ist, wie anderweitig genugsam bekannt ist:

$$41) \dots E = \pi \sqrt{(\mu_0-a)(\mu_0-b)}.$$

Vergleicht man die Ausdrücke 40) und 41) mit einander, so erhält man die Formel:

$$42) \dots \int_a^b \partial\lambda \sqrt{\frac{b-\lambda}{\lambda-a}} = \frac{b-a}{2} \pi.$$

Es wird zweckmässig sein, diese Formel nach einer anderen Methode zu entwickeln, um dadurch zugleich ein Kriterium für die Richtigkeit unserer im Vorhergehenden geführten Rechnungen zu erhalten.

Setzt man

$$b-\lambda = u, \quad \lambda = b-u;$$

so ist:

$$\lambda-a = b-a-u, \quad \partial\lambda = -\partial u;$$

also:

$$\partial\lambda \sqrt{\frac{b-\lambda}{\lambda-a}} = -\partial u \sqrt{\frac{u}{b-a-u}};$$

und weil nun für $\lambda = a$, $\lambda = b$ respective $u = b - a$, $u = 0$ ist, so ist:

$$\int_a^b \partial \lambda \sqrt{\frac{b-\lambda}{\lambda-a}} = - \int_a^0 \partial u \sqrt{\frac{u}{b-a-u}} = \int_0^{b-a} \partial u \sqrt{\frac{u}{b-a-u}}.$$

Setzen wir ferner $u = v^2$, was verstatet ist, weil u jedenfalls positiv ist, und nehmen v positiv, so ist $\partial u = 2v \partial v$, also:

$$\partial u \sqrt{\frac{u}{b-a-u}} = \frac{2v^2 \partial v}{\sqrt{b-a-v^2}},$$

und folglich, weil für $u=0$, $u=b-a$ respective $v=0$, $v=\sqrt{b-a}$ ist:

$$\int_0^{b-a} \partial u \sqrt{\frac{u}{b-a-u}} = 2 \int_0^{\sqrt{b-a}} \frac{v^2 \partial v}{\sqrt{b-a-v^2}},$$

folglich nach dem Obigen:

$$\int_a^b \partial \lambda \sqrt{\frac{b-\lambda}{\lambda-a}} = 2 \int_0^{\sqrt{b-a}} \frac{v^2 \partial v}{\sqrt{b-a-v^2}}.$$

Nach einer sehr bekannten Reductionsformel*) ist aber:

$$\int \frac{v^2 \partial v}{\sqrt{b-a-v^2}} = -\frac{1}{2} v \sqrt{b-a-v^2} + \frac{b-a}{2} \int \frac{\partial v}{\sqrt{b-a-v^2}},$$

also offenbar:

$$\int_0^{\sqrt{b-a}} \frac{v^2 \partial v}{\sqrt{b-a-v^2}} = \frac{b-a}{2} \int_0^{\sqrt{b-a}} \frac{\partial v}{\sqrt{b-a-v^2}},$$

also nach dem Obigen:

$$\int_a^b \partial \lambda \sqrt{\frac{b-\lambda}{\lambda-a}} = (b-a) \int_0^{\sqrt{b-a}} \frac{\partial v}{\sqrt{b-a-v^2}}.$$

Endlich ist:

$$\frac{\partial v}{\sqrt{b-a-v^2}} = \frac{\frac{\partial v}{\sqrt{b-a}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{\sqrt{b-a}}\right)^2}},$$

*) M. s. meine Elemente der Differential- und Integralrechnung. Thl. II. S. 85. §. 57.

also, wenn wir

$$w = \frac{v}{\sqrt{b-a}}$$

setzen:

$$\frac{\partial v}{\sqrt{b-a-v^2}} = \frac{\partial w}{\sqrt{1-w^2}},$$

und folglich, weil für $v=0$, $v=\sqrt{b-a}$ respective $w=0$, $w=1$ ist:

$$\int_0^{\sqrt{b-a}} \frac{\partial v}{\sqrt{b-a-v^2}} = \int_0^1 \frac{\partial w}{\sqrt{1-w^2}},$$

also nach dem Obigen:

$$\int_a^b \partial \lambda \sqrt{\frac{b-\lambda}{\lambda-a}} = (b-a) \int_0^1 \frac{\partial w}{\sqrt{1-w^2}}.$$

Nun ist aber nach einer Fundamentalformel der Differentialrechnung offenbar:

$$\int_0^1 \frac{\partial w}{\sqrt{1-w^2}} = \frac{\pi}{2},$$

also:

$$\int_a^b \partial \lambda \sqrt{\frac{b-\lambda}{\lambda-a}} = \frac{b-a}{2} \pi,$$

ganz eben so wie wir in 42) gefunden haben.

So leisten die elliptischen Coordinaten-Transformationen überhaupt häufig bei der Auswerthung bestimmter Integrale vortreffliche Dienste, was das Vorhergehende einigermassen zu erläutern wohl geeignet sein wird.



XXIX.**Theorie der elliptischen Coordinaten im Raume.**

Von

dem Herausgeber.

§. 1.

Wir beschäftigen uns zuerst mit der Discussion der Wurzeln der Gleichung:

$$1) \dots \dots \dots \frac{x^2}{\varrho - a} + \frac{y^2}{\varrho - b} + \frac{z^2}{\varrho - c} \pm 1 = 0,$$

welche leicht auf die Form:

2)

$$\left. \begin{aligned} &\varrho^3 - \{(a+b+c) \mp (x^2 + y^2 + z^2)\} \varrho^2 \\ &+ \{(ab+bc+ca) \mp [(b+c)x^2 + (c+a)y^2 + (a+b)z^2]\} \varrho \\ &- \{abc \mp (bcx^2 + cay^2 + abz^2)\} \end{aligned} \right\} = 0,$$

oder auf die Form:

3)

$$\left. \begin{aligned} &\varrho^3 - \{(a+b+c) \mp (x^2 + y^2 + z^2)\} \varrho^2 \\ &+ \{(ab+bc+ca) \mp (a+b+c)(x^2 + y^2 + z^2) \pm (ax^2 + by^2 + cz^2)\} \varrho \\ &- \{abc \mp (bcx^2 + cay^2 + abz^2)\} \end{aligned} \right\} = 0$$

gebracht wird.

Der Kürze wegen wollen wir aber zwischen den Grössen a , b , c das bestimmte Grössenverhältniss

$$-\infty, a, b, c$$

bestimmten drei Intervallen liegen.

Weil, wie man leicht findet:

$$\partial f(\varrho) = - \left\{ \left(\frac{x}{\varrho - a} \right)^2 + \left(\frac{y}{\varrho - b} \right)^2 + \left(\frac{z}{\varrho - c} \right)^2 \right\} \partial \varrho$$

ist, so haben $\partial \varrho$ und $\partial f(\varrho)$ stets entgegengesetzte Vorzeichen, so dass also, wenn ϱ zwischen gewissen Gränzen, zwischen denen keine Unterbrechung der Stetigkeit von $f(\varrho)$ eintritt, wächst oder abnimmt, zwischen denselben Gränzen $f(\varrho)$ respective stets abnehmen oder stets wachsen muss.

Ferner betrachten wir die Gleichung:

$$5) \dots \dots \dots \frac{x^2}{\varrho - a} + \frac{y^2}{\varrho - b} + \frac{z^2}{\varrho - c} - 1 = 0,$$

und setzen der Kürze wegen;

$$F(\varrho) = \frac{x^2}{\varrho - a} + \frac{y^2}{\varrho - b} + \frac{z^2}{\varrho - c} - 1.$$

Weil

$$F(a + i) = \frac{x^2}{i} + \frac{y^2}{a - b + i} + \frac{z^2}{a - c + i} - 1$$

und

$$F(b - i) = \frac{x^2}{b - a - i} - \frac{y^2}{i} + \frac{z^2}{b - c - i} - 1,$$

also offenbar $F(a + i)$ positiv und $F(b - i)$ negativ ist; so liegt zwischen a und b eine reelle Wurzel der Gleichung 5). Ganz eben so wird gezeigt, dass auch zwischen b und c eine reelle Wurzel dieser Gleichung liegt, woraus nun schon von selbst folgt, dass deren dritte Wurzel gleichfalls reell sein muss, und also bloss noch die Gränzen dieser dritten reellen Wurzel zu bestimmen sind. Weil aber

$$F(c + i) = \frac{x^2}{c - a + i} + \frac{y^2}{c - b + i} + \frac{z^2}{i} - 1$$

und

$$F(+J) = \frac{x^2}{J - a} + \frac{y^2}{J - b} + \frac{z^2}{J - c} - 1,$$

also offenbar $F(c + i)$ positiv und $F(+J)$ negativ ist, so kann die

7)

$$(q-a)(q-b)(q-c) \pm x^2(q-b)(q-c) \pm y^2(q-c)(q-a) \pm z^2(q-a)(q-b) \\ = (q-\lambda)(q-\mu)(q-\nu).$$

Setzt man in dieser Gleichung, welche, wie bemerkt, für jedes q gilt, nach und nach $q = a$, $q = b$, $q = c$; so erhält man die folgenden Gleichungen:

$$8) \quad \dots \quad \begin{cases} (a-b)(a-c)x^2 = \pm (a-\lambda)(a-\mu)(a-\nu), \\ (b-c)(b-a)y^2 = \pm (b-\lambda)(b-\mu)(b-\nu), \\ (c-a)(c-b)z^2 = \pm (c-\lambda)(c-\mu)(c-\nu); \end{cases}$$

oder:

$$9) \quad \dots \quad \begin{cases} x^2 = \pm \frac{(a-\lambda)(a-\mu)(a-\nu)}{(a-b)(a-c)}, \\ y^2 = \pm \frac{(b-\lambda)(b-\mu)(b-\nu)}{(b-c)(b-a)}, \\ z^2 = \pm \frac{(c-\lambda)(c-\mu)(c-\nu)}{(c-a)(c-b)}. \end{cases}$$

Setzt man in der Gleichung 7) nach und nach $q = \lambda$, $q = \mu$, $q = \nu$, und der Kürze wegen:

$$10) \quad \dots \quad \begin{cases} L = (\lambda-a)(\lambda-b)(\lambda-c), \\ M = (\mu-a)(\mu-b)(\mu-c), \\ N = (\nu-a)(\nu-b)(\nu-c); \end{cases}$$

so erhält man die drei folgenden Gleichungen:

11)

$$L \pm (\lambda-b)(\lambda-c)x^2 \pm (\lambda-c)(\lambda-a)y^2 \pm (\lambda-a)(\lambda-b)z^2 = 0, \\ M \pm (\mu-b)(\mu-c)x^2 \pm (\mu-c)(\mu-a)y^2 \pm (\mu-a)(\mu-b)z^2 = 0, \\ N \pm (\nu-b)(\nu-c)x^2 \pm (\nu-c)(\nu-a)y^2 \pm (\nu-a)(\nu-b)z^2 = 0.$$

Multipliziert man diese Gleichungen nach der Reihe mit:

$$(\mu-c)(\mu-a) \cdot (\nu-a)(\nu-b) - (\mu-a)(\mu-b) \cdot (\nu-c)(\nu-a) \\ = (\mu-a)(\nu-a) \{ (\mu-c)(\nu-b) - (\mu-b)(\nu-c) \} \\ = -(b-c)(\mu-\nu)(\mu-a)(\nu-a),$$

$$(\nu-c)(\nu-a) \cdot (\lambda-a)(\lambda-b) - (\nu-a)(\nu-b) \cdot (\lambda-c)(\lambda-a) \\ = (\nu-a)(\lambda-a) \{ (\nu-c)(\lambda-b) - (\nu-b)(\lambda-c) \} \\ = -(b-c)(\nu-\lambda)(\nu-a)(\lambda-a),$$

$$\begin{aligned}
& (\lambda - c)(\lambda - a) \cdot (\mu - a)(\mu - b) - (\lambda - a)(\lambda - b) \cdot (\mu - c)(\mu - a) \\
& = (\lambda - a)(\mu - a) \{ (\lambda - c)(\mu - b) - (\lambda - b)(\mu - c) \} \\
& = - (b - c)(\lambda - \mu)(\lambda - a)(\mu - a);
\end{aligned}$$

oder, wenn der Kürze wegen:

$$12) \quad \dots \quad \left\{ \begin{aligned} A &= (\lambda - a)(\mu - a)(\nu - a), \\ B &= (\lambda - b)(\mu - b)(\nu - b), \\ C &= (\lambda - c)(\mu - c)(\nu - c) \end{aligned} \right.$$

gesetzt wird, nach der Reihe mit

$$- \frac{(b - c)(\mu - \nu)A}{\lambda - a}, \quad - \frac{(b - c)(\nu - \lambda)A}{\mu - a}, \quad - \frac{(b - c)(\lambda - \mu)A}{\nu - a}$$

und addirt dann die drei Gleichungen zu einander; so erhält man nach einfacher Reduction die Gleichung:

$$\begin{aligned}
& \frac{\mu - \nu}{\lambda - a} L + \frac{\nu - \lambda}{\mu - a} M + \frac{\lambda - \mu}{\nu - a} N \\
& \pm \left\{ \frac{(\mu - \nu)(\lambda - b)(\lambda - c)}{\lambda - a} + \frac{(\nu - \lambda)(\mu - b)(\mu - c)}{\mu - a} + \frac{(\lambda - \mu)(\nu - b)(\nu - c)}{\nu - a} \right\} x^2 \\
& = 0,
\end{aligned}$$

oder, wie sogleich erhellet:

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{\mu - \nu}{(\lambda - a)^2} L + \frac{\nu - \lambda}{(\mu - a)^2} M + \frac{\lambda - \mu}{(\nu - a)^2} N \right\} x^2 \\
& = \mp \left\{ \frac{\mu - \nu}{\lambda - a} L + \frac{\nu - \lambda}{\mu - a} M + \frac{\lambda - \mu}{\nu - a} N \right\}.
\end{aligned}$$

Nimmt man aber in dieser Gleichung eine einfache Vertauschung der Buchstaben vor, so erhält man überhaupt die drei folgenden Gleichungen:

13)

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{\mu - \nu}{(\lambda - a)^2} L + \frac{\nu - \lambda}{(\mu - a)^2} M + \frac{\lambda - \mu}{(\nu - a)^2} N \right\} x^2 \\
& = \mp \left\{ \frac{\mu - \nu}{\lambda - a} L + \frac{\nu - \lambda}{\mu - a} M + \frac{\lambda - \mu}{\nu - a} N \right\}, \\
& \left\{ \frac{\mu - \nu}{(\lambda - b)^2} L + \frac{\nu - \lambda}{(\mu - b)^2} M + \frac{\lambda - \mu}{(\nu - b)^2} N \right\} y^2 \\
& = \mp \left\{ \frac{\mu - \nu}{\lambda - b} L + \frac{\nu - \lambda}{\mu - b} M + \frac{\lambda - \mu}{\nu - b} N \right\},
\end{aligned}$$

$$\left\{ \frac{\mu-\nu}{(\lambda-c)^2} L + \frac{\nu-\lambda}{(\mu-c)^2} M + \frac{\lambda-\mu}{(\nu-c)^2} N \right\} x^2 \\ = \mp \left\{ \frac{\mu-\nu}{\lambda-c} L + \frac{\nu-\lambda}{\mu-c} M + \frac{\lambda-\mu}{\nu-c} N \right\}.$$

Aus den drei Gleichungen 11) ergeben sich auch unmittelbar die drei folgenden Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} & \{ (\lambda-b)(\lambda-c)M - (\mu-b)(\mu-c)L \} x^2 \\ & + \{ (\lambda-c)(\lambda-a)M - (\mu-c)(\mu-a)L \} y^2 \\ & + \{ (\lambda-a)(\lambda-b)M - (\mu-a)(\mu-b)L \} z^2 \end{aligned} \right\} = 0,$$

$$\left. \begin{aligned} & \{ (\mu-b)(\mu-c)N - (\nu-b)(\nu-c)M \} x^2 \\ & + \{ (\mu-c)(\mu-a)N - (\nu-c)(\nu-a)M \} y^2 \\ & + \{ (\mu-a)(\mu-b)N - (\nu-a)(\nu-b)M \} z^2 \end{aligned} \right\} = 0,$$

$$\left. \begin{aligned} & \{ (\nu-b)(\nu-c)L - (\lambda-b)(\lambda-c)N \} x^2 \\ & + \{ (\nu-c)(\nu-a)L - (\lambda-c)(\lambda-a)N \} y^2 \\ & + \{ (\nu-a)(\nu-b)L - (\lambda-a)(\lambda-b)N \} z^2 \end{aligned} \right\} = 0$$

oder:

$$\left(\frac{LM}{\lambda-a} - \frac{LM}{\mu-a} \right) x^2 + \left(\frac{LM}{\lambda-b} - \frac{LM}{\mu-b} \right) y^2 + \left(\frac{LM}{\lambda-c} - \frac{LM}{\mu-c} \right) z^2 = 0,$$

$$\left(\frac{MN}{\mu-a} - \frac{MN}{\nu-a} \right) x^2 + \left(\frac{MN}{\mu-b} - \frac{MN}{\nu-b} \right) y^2 + \left(\frac{MN}{\mu-c} - \frac{MN}{\nu-c} \right) z^2 = 0,$$

$$\left(\frac{NL}{\nu-a} - \frac{NL}{\lambda-a} \right) x^2 + \left(\frac{NL}{\nu-b} - \frac{NL}{\lambda-b} \right) y^2 + \left(\frac{NL}{\nu-c} - \frac{NL}{\lambda-c} \right) z^2 = 0;$$

also offenbar:

14)

$$\frac{x^2}{(\lambda-a)(\mu-a)} + \frac{y^2}{(\lambda-b)(\mu-b)} + \frac{z^2}{(\lambda-c)(\mu-c)} = 0,$$

$$\frac{x^2}{(\mu-a)(\nu-a)} + \frac{y^2}{(\mu-b)(\nu-b)} + \frac{z^2}{(\mu-c)(\nu-c)} = 0,$$

$$\frac{x^2}{(\nu-a)(\lambda-a)} + \frac{y^2}{(\nu-b)(\lambda-b)} + \frac{z^2}{(\nu-c)(\lambda-c)} = 0.$$

Schreibt man die für jedes ρ geltende Gleichung 7) unter der Form:

15)

$$\frac{x^2}{\varrho-a} + \frac{y^2}{\varrho-b} + \frac{z^2}{\varrho-c} \pm 1 = \pm \frac{(\varrho-\lambda)(\varrho-\mu)(\varrho-\nu)}{(\varrho-a)(\varrho-b)(\varrho-c)}$$

und differentiirt dieselbe dann nach ϱ , so erhält man die Gleichung:

$$16) \dots \dots \left(\frac{x}{\varrho-a}\right)^2 + \left(\frac{y}{\varrho-b}\right)^2 + \left(\frac{z}{\varrho-c}\right)^2 \\ = \mp \frac{\begin{cases} (\varrho-a)(\varrho-b)(\varrho-c)[(\varrho-\lambda)(\varrho-\mu) + (\varrho-\mu)(\varrho-\nu) + (\varrho-\nu)(\varrho-\lambda)] \\ -(\varrho-\lambda)(\varrho-\mu)(\varrho-\nu)[(\varrho-a)(\varrho-b) + (\varrho-b)(\varrho-c) + (\varrho-c)(\varrho-a)] \end{cases}}{(\varrho-a)^2(\varrho-b)^2(\varrho-c)^2},$$

Iso, wenn wir nach und nach $\varrho = \lambda$, $\varrho = \mu$, $\varrho = \nu$ setzen:

17)

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{\lambda-a}\right)^2 + \left(\frac{y}{\lambda-b}\right)^2 + \left(\frac{z}{\lambda-c}\right)^2 &= \mp \frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{(\lambda-a)(\lambda-b)(\lambda-c)}, \\ \left(\frac{x}{\mu-a}\right)^2 + \left(\frac{y}{\mu-b}\right)^2 + \left(\frac{z}{\mu-c}\right)^2 &= \mp \frac{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)}{(\mu-a)(\mu-b)(\mu-c)}, \\ \left(\frac{x}{\nu-a}\right)^2 + \left(\frac{y}{\nu-b}\right)^2 + \left(\frac{z}{\nu-c}\right)^2 &= \mp \frac{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}{(\nu-a)(\nu-b)(\nu-c)}. \end{aligned}$$

Die durch Differentiation hergeleitete Gleichung 15) kann man auch auf folgende Art schreiben:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{x}{\varrho-a}\right)^2 + \left(\frac{y}{\varrho-b}\right)^2 + \left(\frac{z}{\varrho-c}\right)^2 \\ &= \mp \frac{(\varrho-\lambda)(\varrho-\mu)(\varrho-\nu)}{(\varrho-a)(\varrho-b)(\varrho-c)} \left\{ \frac{1}{\varrho-\lambda} + \frac{1}{\varrho-\mu} + \frac{1}{\varrho-\nu} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\varrho-a} - \frac{1}{\varrho-b} - \frac{1}{\varrho-c} \right\}, \end{aligned}$$

also auf folgende Art:

$$18) \dots \dots \left(\frac{x}{\varrho-a}\right)^2 + \left(\frac{y}{\varrho-b}\right)^2 + \left(\frac{z}{\varrho-c}\right)^2 \\ = \mp \frac{(\varrho-\lambda)(\varrho-\mu)(\varrho-\nu)}{(\varrho-a)(\varrho-b)(\varrho-c)} \left\{ \frac{\lambda-a}{(\varrho-a)(\varrho-\lambda)} + \frac{\mu-b}{(\varrho-b)(\varrho-\mu)} + \frac{\nu-c}{(\varrho-c)(\varrho-\nu)} \right\}$$

woraus sich, wenn man hiemit 16) verbindet, die Relation:

$$2y \frac{\partial y}{\partial \mu} = \mp \frac{(b-a)(b-\mu)}{(b-c)(b-a)},$$

$$2y \frac{\partial y}{\partial \nu} = \mp \frac{(b-\lambda)(b-\mu)}{(b-c)(b-a)};$$

$$2z \frac{\partial z}{\partial \lambda} = \mp \frac{(c-\mu)(c-\nu)}{(c-a)(c-b)},$$

$$2z \frac{\partial z}{\partial \mu} = \mp \frac{(c-\nu)(c-\lambda)}{(c-a)(c-b)},$$

$$2z \frac{\partial z}{\partial \nu} = \mp \frac{(c-\lambda)(c-\mu)}{(c-a)(c-b)}$$

oder:

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = \mp \frac{x}{2} \cdot \frac{(a-\mu)(a-\nu)}{(a-b)(a-c)} \cdot \frac{1}{x^2},$$

$$\frac{\partial x}{\partial \mu} = \mp \frac{x}{2} \cdot \frac{(a-\nu)(a-\lambda)}{(a-b)(a-c)} \cdot \frac{1}{x^2},$$

$$\frac{\partial x}{\partial \nu} = \mp \frac{x}{2} \cdot \frac{(a-\lambda)(a-\mu)}{(a-b)(a-c)} \cdot \frac{1}{x^2};$$

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda} = \mp \frac{y}{2} \cdot \frac{(b-\mu)(b-\nu)}{(b-c)(b-a)} \cdot \frac{1}{y^2},$$

$$\frac{\partial y}{\partial \mu} = \mp \frac{y}{2} \cdot \frac{(b-\nu)(b-\lambda)}{(b-c)(b-a)} \cdot \frac{1}{y^2},$$

$$\frac{\partial y}{\partial \nu} = \mp \frac{y}{2} \cdot \frac{(b-\lambda)(b-\mu)}{(b-c)(b-a)} \cdot \frac{1}{y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial \lambda} = \mp \frac{z}{2} \cdot \frac{(c-\mu)(c-\nu)}{(c-a)(c-b)} \cdot \frac{1}{z^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial \mu} = \mp \frac{z}{2} \cdot \frac{(c-\nu)(c-\lambda)}{(c-a)(c-b)} \cdot \frac{1}{z^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial \nu} = \mp \frac{z}{2} \cdot \frac{(c-\lambda)(c-\mu)}{(c-a)(c-b)} \cdot \frac{1}{z^2};$$

lich nach 9):

20)

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = -\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{a-\lambda} = \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{\lambda-a},$$

$$\frac{\partial x}{\partial \mu} = -\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{a-\mu} = \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{\mu-a},$$

$$\frac{\partial x}{\partial \nu} = -\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{a-\nu} = \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{\nu-a};$$

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda} = -\frac{y}{2} \cdot \frac{1}{b-\lambda} = \frac{y}{2} \cdot \frac{1}{\lambda-b},$$

$$\frac{\partial y}{\partial \mu} = -\frac{y}{2} \cdot \frac{1}{b-\mu} = \frac{y}{2} \cdot \frac{1}{\mu-b},$$

$$\frac{\partial y}{\partial \nu} = -\frac{y}{2} \cdot \frac{1}{b-\nu} = \frac{y}{2} \cdot \frac{1}{\nu-b};$$

$$\frac{\partial z}{\partial \lambda} = -\frac{z}{2} \cdot \frac{1}{c-\lambda} = \frac{z}{2} \cdot \frac{1}{\lambda-c},$$

$$\frac{\partial z}{\partial \mu} = -\frac{z}{2} \cdot \frac{1}{c-\mu} = \frac{z}{2} \cdot \frac{1}{\mu-c},$$

$$\frac{\partial z}{\partial \nu} = -\frac{z}{2} \cdot \frac{1}{c-\nu} = \frac{z}{2} \cdot \frac{1}{\nu-c}.$$

I nun

$$\begin{aligned}
& + 2 \left\{ \frac{x^2}{(\lambda-a)(\mu-a)} + \frac{y^2}{(\lambda-b)(\mu-b)} + \frac{z^2}{(\lambda-c)(\mu-c)} \right\} \partial \lambda \partial \mu \\
& + 2 \left\{ \frac{x^2}{(\mu-a)(\nu-a)} + \frac{y^2}{(\mu-b)(\nu-b)} + \frac{z^2}{(\mu-c)(\nu-c)} \right\} \partial \mu \partial \nu \\
& + 2 \left\{ \frac{x^2}{(\nu-a)(\lambda-a)} + \frac{y^2}{(\nu-b)(\lambda-b)} + \frac{z^2}{(\nu-c)(\lambda-c)} \right\} \partial \nu \partial \lambda,
\end{aligned}$$

und folglich nach 17) und 14):

$$\begin{aligned}
22) \quad & \dots \dots \dots 4(\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2) \\
& = \mp \frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{(\lambda-a)(\lambda-b)(\lambda-c)} \partial \lambda^2 \\
& \quad \mp \frac{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)}{(\mu-a)(\mu-b)(\mu-c)} \partial \mu^2 \\
& \quad \mp \frac{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}{(\nu-a)(\nu-b)(\nu-c)} \partial \nu^2,
\end{aligned}$$

oder, wenn der Kürze wegen:

23)

$$L' = \mp \frac{(\lambda - \mu)(\lambda - \nu)}{4(\lambda - a)(\lambda - b)(\lambda - c)} = \mp \frac{(\lambda - \mu)(\lambda - \nu)}{4L},$$

$$M' = \mp \frac{(\mu - \nu)(\mu - \lambda)}{4(\mu - a)(\mu - b)(\mu - c)} = \mp \frac{(\mu - \nu)(\mu - \lambda)}{4M},$$

$$N' = \mp \frac{(\nu - \lambda)(\nu - \mu)}{4(\nu - a)(\nu - b)(\nu - c)} = \mp \frac{(\nu - \lambda)(\nu - \mu)}{4N}$$

gesetzt wird:

$$24) \dots \partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2 = L' \partial \lambda^2 + M' \partial \mu^2 + N' \partial \nu^2.$$

§. 3.

Wir wollen nun untersuchen, welche Flächen des zweiten Grades durch die Gleichungen:

$$\frac{x^2}{\lambda - a} + \frac{y^2}{\lambda - b} + \frac{z^2}{\lambda - c} - 1 = 0,$$

$$\frac{x^2}{\mu - a} + \frac{y^2}{\mu - b} + \frac{z^2}{\mu - c} - 1 = 0,$$

$$\frac{x^2}{\nu - a} + \frac{y^2}{\nu - b} + \frac{z^2}{\nu - c} - 1 = 0;$$

oder:

$$25) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{\lambda - a} + \frac{y^2}{\lambda - b} + \frac{z^2}{\lambda - c} = 1, \\ \frac{x^2}{\mu - a} + \frac{y^2}{\mu - b} + \frac{z^2}{\mu - c} = 1, \\ \frac{x^2}{\nu - a} + \frac{y^2}{\nu - b} + \frac{z^2}{\nu - c} = 1 \end{array} \right.$$

dargestellt werden, wenn wir voraussetzen, dass

$$a < \lambda < b < \mu < c < \nu$$

sei, so dass also λ, μ, ν in dieser Folge nach der Grösse aufsteigend geordnet sind. Schreiben wir aber diese Gleichungen unter der Form:

$$x^2 = \frac{(\lambda - a)(\mu - a)(\nu - a)}{(b - a)(c - a)},$$

$$y^2 = \frac{(b - \lambda)(\mu - b)(\nu - b)}{(c - b)(b - a)},$$

$$z^2 = \frac{(c - \lambda)(c - \mu)(\nu - c)}{(c - a)(c - b)}$$

bestimmt werden, wobei zu beachten ist, dass wegen der Bedingung

$$a < \lambda < b < \mu < c < \nu$$

offenbar

$$\frac{(\lambda - a)(\mu - a)(\nu - a)}{(b - a)(c - a)},$$

$$\frac{(b - \lambda)(\mu - b)(\nu - b)}{(c - b)(b - a)},$$

$$\frac{(c - \lambda)(c - \mu)(\nu - c)}{(c - a)(c - b)}$$

jederzeit positive Grössen sind, die obigen Formeln also für x, y, z immer reelle Werthe liefern. Freilich ergeben sich aus diesen Formeln, wenn wir der Kürze wegen:

$$\mathfrak{A} = \frac{(\lambda - a)(\mu - a)(\nu - a)}{(a - b)(a - c)},$$

$$\mathfrak{B} = \frac{(\lambda - b)(\mu - b)(\nu - b)}{(b - c)(b - a)},$$

$$\mathfrak{C} = \frac{(\lambda - c)(\mu - c)(\nu - c)}{(c - a)(c - b)}$$

setzen, für x, y, z die acht entsprechenden Systeme von Werthen:

$$x = +\sqrt{\mathfrak{A}}, \quad y = +\sqrt{\mathfrak{B}}, \quad z = +\sqrt{\mathfrak{C}};$$

$$x = -\sqrt{\mathfrak{A}}, \quad y = +\sqrt{\mathfrak{B}}, \quad z = +\sqrt{\mathfrak{C}};$$

$$x = -\sqrt{\mathfrak{A}}, \quad y = -\sqrt{\mathfrak{B}}, \quad z = +\sqrt{\mathfrak{C}};$$

$$x = +\sqrt{\mathfrak{A}}, \quad y = -\sqrt{\mathfrak{B}}, \quad z = +\sqrt{\mathfrak{C}};$$

$$x = +\sqrt{\mathfrak{A}}, \quad y = +\sqrt{\mathfrak{B}}, \quad z = -\sqrt{\mathfrak{C}};$$

29)
$$V = \int_c^{v_0} \int_b^v \int_a^\mu \frac{(\mu - \lambda)(v - \mu)(v - \lambda)}{\sqrt{(\lambda - a)(b - \lambda)(c - \lambda)} \sqrt{(\mu - a)(\mu - b)(c - \mu)} \sqrt{(v - a)(v - b)(v - c)}} \partial \lambda \partial \mu \partial v.$$

Anderweitig ist aber hinreichend bekannt, dass

$$V = \frac{1}{2} \pi \sqrt{(v_0 - a)(v_0 - b)(v_0 - c)}$$

ist, weil die drei Halbaxen unseres Ellipsoids

$$\sqrt{v_0 - a}, \quad \sqrt{v_0 - b}, \quad \sqrt{v_0 - c}$$

sind, woraus sich, wenn man diesen Ausdruck von V mit dem Ausdrücke 29) derselben Grösse vergleicht, die merkwürdige Gleichung:

$$\frac{1}{2} \pi \sqrt{(v_0 - a)(v_0 - b)(v_0 - c)} = \int_c^{v_0} \int_b^v \int_a^\mu \frac{(\mu - \lambda)(v - \mu)(v - \lambda)}{\sqrt{(\lambda - a)(b - \lambda)(c - \lambda)} \sqrt{(\mu - a)(\mu - b)(c - \mu)} \sqrt{(v - a)(v - b)(v - c)}} \partial \lambda \partial \mu \partial v,$$

oder, wenn man, was offenbar verstattet

$$3\pi\sqrt{(v-a)(v-b)(v-c)} = \int_a^v \int_b^v \int_c^v$$

ergiebt*), wobei natürlich immer die Bed

festzuhalten ist.

*) M. vergl. Vorlesungen über ana
S. 270, Nr. (57).

XXX.**Ueber bestimmte Integrale.**

(Fortsetzung von Thl. XXXIX. Nr. XIX.)

Von

Herrn Dr. L. Oettinger,**Grossherzoglich Badischem Hofrathe und ordentlichem Professor der
Mathematik an der Universität zu Freiburg i. B.****III.****§. 31.**

Der eben in §. 30. angegebene Zweck wird erreicht, wenn man die bisher befolgten Methoden mit einander verbindet.

Um das Integral $\int_0^1 \frac{x^m (\lg x)^r \partial x}{1-x}$ darzustellen, hat man in der Gleichung Nr. 6) §. 2. x statt z zu schreiben, mit x^m zu multiplizieren und r in m umzusetzen, wodurch

$$\frac{x^m}{1-x} = -(x^{m-1} + x^{m-2} + x^{m-3} + \dots + x + 1) + \frac{1}{1-x}$$

entsteht. Verbindet man diese Gleichung mit $\int_0^1 (\lg x)^r \partial x$, so erhält man:

1)

$$\int_0^1 \frac{x^m (\lg x)^r \partial x}{1-x} = - \int_0^1 (\lg x)^r (x^{m-1} + x^{m-2} + \dots + 1) \partial x + \int_0^1 \frac{(\lg x)^r \partial x}{1-x}.$$

Wird jedes Glied auf der rechten Seite nach §. 19. Nr. 1) behandelt und der Werth für $\int_0^1 (\lg x)^r \partial x$ aus Nr. 14) §. 21. eingeführt, so bestimmt sich das fragliche Integral auf folgende Weise:

2)

$$\int_0^1 \frac{x^m (\lg x)^r dx}{1-x} = (-)^r \cdot 1^{r+1} \left(1 + \frac{1}{2^{r+1}} + \frac{1}{3^{r+1}} + \dots\right) \\
(-)^{r+1} \cdot 1^{r+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{2^{r+1}} + \frac{1}{3^{r+1}} + \dots + \frac{1}{m^{r+1}}\right) \\
\Rightarrow (-)^r \cdot 1^{r+1} \cdot S(1, 1)^{r+1} (-)^{r+1} \cdot 1^{r+1} \cdot \sum_1^m \frac{1}{u^{r+1}}.$$

Hiermit stimmt die in Nr. 1) §. 22. gegebene allgemeinere Gleichung:

3)

$$\int_0^1 \frac{x^{mp+p-1} (\lg x)^r dx}{1-x^p} \\
= (-)^r \cdot \frac{1^{r+1}}{p^{r+1}} S(1, 1)^{r+1} (-)^{r+1} \cdot \frac{1^{r+1}}{p^{r+1}} \left(1 + \frac{1}{2^{r+1}} + \frac{1}{3^{r+1}} + \dots + \frac{1}{m^{r+1}}\right)$$

überein, aus der sich Nr. 2) ableitet, wenn $p=1$ wird.

An diese Gleichungen schliesst sich eine Reihe von Ableitungen. Setzt man nämlich $r=1$, $m=0, 1, 2, \dots$, so leiten sich aus Nr. 2) folgende Integrale ab:

4)

$$\int_0^1 \frac{\lg x}{1-x} dx = -S(1, 1)^2 = -\frac{\pi^2}{6}, \\
\int_0^1 \frac{x \lg x}{1-x} dx = -\frac{\pi^2}{6} + 1, \\
\int_0^1 \frac{x^2 \lg x}{1-x} dx = -\frac{\pi^2}{6} + \frac{5}{4}, \\
\int_0^1 \frac{x^3 \lg x}{1-x} dx = -\frac{\pi^2}{6} + \frac{49}{36}, \\
\int_0^1 \frac{x^4 \lg x}{1-x} dx = -\frac{\pi^2}{6} + \frac{205}{144}, \\
\int_0^1 \frac{x^5 \lg x}{1-x} dx = -\frac{\pi^2}{6} + \frac{5269}{3600}, \\
\dots\dots\dots \\
\int_0^1 \frac{x^m \lg x}{1-x} dx = -\frac{\pi^2}{6} + \sum_1^m \frac{1}{u^2}.$$

Hierin ist:

$$S(1, 1)^2 = \frac{\pi^2}{6} = 1,6449340668482264 \dots$$

1, 2, n zu schreiben und sofort die sich ergebenden Werthe zu vereinigen. Hiernach ist:

8)

$$\begin{aligned} & \Sigma_1^m a_n \left(\Sigma_1^n \frac{1}{u^2} \right) \\ &= a_1 + a_2 \left(1 + \frac{1}{2^2} \right) + a_3 \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \right) + \dots + a_m \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{m^2} \right) \\ &= a_1 + a_2 + \dots + a_m + (a_2 + a_3 + \dots + a_m) \frac{1}{2^2} + (a_3 + a_4 + \dots + a_m) \frac{1}{3^2} \\ & \quad + \dots + (a_{m-1} + a_m) \frac{1}{(m-1)^2} + a_m \frac{1}{m^2}. \end{aligned}$$

Beide Darstellungen in Nr. 8) dienen zur gegenseitigen Controle für die richtige Werthberechnung. Setzt man nun statt der a die Vorkzahlen der Potenzen des Binomiums $(1+x)$, so erhält man hieraus folgende Integrale:

9)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{(1+x) \lg x}{1-x} dx &= -\frac{\pi^2}{3} + 1, \\ \int_0^1 \frac{(1+x)^2 \lg x}{1-x} dx &= -\frac{2\pi^2}{3} + \frac{13}{4}, \\ \int_0^1 \frac{(1+x)^3 \lg x}{1-x} dx &= -\frac{4\pi^2}{3} + \frac{73}{9}, \\ \int_0^1 \frac{(1+x)^4 \lg x}{1-x} dx &= -\frac{8\pi^2}{3} + \frac{2645}{144}, \\ \int_0^1 \frac{(1+x)^5 \lg x}{1-x} dx &= -\frac{16\pi^2}{3} + \frac{71447}{1800}, \end{aligned}$$

u. s. w.

Aus Nr. 3) ergeben sich, wenn $p=2, 3, 4, \dots$ gesetzt wird, folgende Integrale:

10)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^{2m+1} \lg x}{1-x^2} dx &= -\frac{1}{4} S(1, 1)^2 + \frac{1}{4} \Sigma_1^m \frac{1}{u^2}, \\ \int_0^1 \frac{x^{3m+2} \lg x}{1-x^3} dx &= -\frac{1}{9} S(1, 1)^2 + \frac{1}{9} \Sigma_1^m \frac{1}{u^2}, \\ \int_0^1 \frac{x^{4m+3} \lg x}{1-x^4} dx &= -\frac{1}{16} S(1, 1)^2 + \frac{1}{16} \Sigma_1^m \frac{1}{u^2}, \end{aligned}$$

u. s. w.

1)

$$\int_0^1 \frac{(\lg x)^2}{1-x} dx = 2S(1, 1)^3,$$

$$\int_0^1 \frac{x(\lg x)^2}{1-x} dx = 2S(1, 1)^3 - 2,$$

$$\int_0^1 \frac{x^2(\lg x)^2}{1-x} dx = 2S(1, 1)^3 - \frac{9}{4},$$

$$\int_0^1 \frac{x^3(\lg x)^2}{1-x} dx = 2S(1, 1)^3 - \frac{251}{108},$$

$$\int_0^1 \frac{x^4(\lg x)^2}{1-x} dx = 2S(1, 1)^3 - \frac{2035}{864},$$

$$\int_0^1 \frac{x^5(\lg x)^2}{1-x} dx = 2S(1, 1)^3 - \frac{286103}{108000},$$

$$\int_0^1 \frac{x^m(\lg x)^2}{1-x} dx = 2S(1, 1)^3 - 2\sum_1^m \frac{1}{u^3}.$$

Durch Vereinigung dieser Ausdrücke entsteht:

2)

$$\int_0^1 \frac{(1-x^{m+1})(\lg x)^2}{(1-x)^2} dx = 2(m+1)S(1, 1)^3 - 2\sum_1^m \frac{m-u+1}{u^3},$$

und hieraus:

$$\int_0^1 \frac{(1-x^2)(\lg x)^2}{(1-x)^2} dx = 4S(1, 1)^3 - 2,$$

$$\int_0^1 \frac{(1-x^3)(\lg x)^2}{(1-x)^2} dx = 6S(1, 1)^3 - \frac{17}{4},$$

$$\int_0^1 \frac{(1-x^4)(\lg x)^2}{(1-x)^2} dx = 8S(1, 1)^3 - \frac{355}{54},$$

$$\int_0^1 \frac{(1-x^5)(\lg x)^2}{(1-x)^2} dx = 10S(1, 1)^3 - \frac{7715}{864},$$

u. s. w.

Eben so erhält man:

3)

$$\int_0^1 \frac{(\sum_0^m a_u x^u)(\lg x)^2}{1-x} dx = 2(\sum_0^m a_u)S(1, 1)^3 - 2\sum_1^m a_u \left(\sum_1^u \frac{1}{u^3}\right),$$

woraus sich folgende Integrale nach der in §. 31. angegebenen Methode ableiten:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{(1+x)(\lg x)^2}{1-x} dx &= 4S(1, 1)^3 - 2, \\
\int_0^1 \frac{(1+x)^2(\lg x)^2}{1-x} dx &= 8S(1, 1)^3 - \frac{25}{4}, \\
\int_0^1 \frac{(1+x)^3(\lg x)^2}{1-x} dx &= 16S(1, 1)^3 - \frac{407}{27}, \\
\int_0^1 \frac{(1+x)^4(\lg x)^2}{1-x} dx &= 32S(1, 1)^3 - \frac{28643}{864}, \\
&\text{u. s. w.}
\end{aligned}$$

Hierin ist $S(1, 1)^3 = 1,2020569031595942\dots$

Wird $r=3$ und $m=0, 1, 2, \dots$ in Nr. 2) §. 31. gesetzt, so gewinnt man folgende Integrale:

$$\begin{aligned}
&4) \\
\int_0^1 \frac{(\lg x)^3}{1-x} dx &= -6S(1, 1)^4 = -\frac{\pi^4}{15}, \\
\int_0^1 \frac{x(\lg x)^3}{1-x} dx &= -\frac{\pi^4}{15} + 6, \\
\int_0^1 \frac{x^2(\lg x)^3}{1-x} dx &= -\frac{\pi^4}{15} + \frac{51}{8}, \\
\int_0^1 \frac{x^3(\lg x)^3}{1-x} dx &= -\frac{\pi^4}{15} + \frac{1393}{216}, \\
\int_0^1 \frac{x^4(\lg x)^3}{1-x} dx &= -\frac{\pi^4}{15} + \frac{22369}{3456}, \\
\int_0^1 \frac{x^5(\lg x)^3}{1-x} dx &= -\frac{\pi^4}{15} + \frac{14001361}{2160000}, \\
&\text{u. s. w.}
\end{aligned}$$

Eben so ergibt sich durch Vereinigung der in Nr. 4) angegebenen Resultate:

$$\begin{aligned}
&5) \\
\int_0^1 \frac{(1-x^2)(\lg x)^3}{(1-x)^2} dx &= -\frac{2\pi^4}{15} + 6, \\
\int_0^1 \frac{(1-x^3)(\lg x)^3}{(1-x)^2} dx &= -\frac{\pi^4}{5} + \frac{99}{8}, \\
\int_0^1 \frac{(1-x^4)(\lg x)^3}{(1-x)^2} dx &= -\frac{4\pi^4}{15} + \frac{2033}{108}, \\
\int_0^1 \frac{(1-x^5)(\lg x)^3}{(1-x)^2} dx &= -\frac{\pi^4}{3} + \frac{87425}{3456}, \\
&\dots\dots\dots \\
\int_0^1 \frac{(1-x^{m+1})(\lg x)^3}{(1-x)^2} dx &= -\frac{(m+1)\pi^4}{15} + 6 \cdot \sum_1^m \frac{m-u+1}{u^4}.
\end{aligned}$$

1)

$$\int_0^1 \frac{(\lg x)^2}{1-x} dx = 2S(1, 1)^3,$$

$$\int_0^1 \frac{x(\lg x)^2}{1-x} dx = 2S(1, 1)^3 - 2,$$

$$\int_0^1 \frac{x^2(\lg x)^2}{1-x} dx = 2S(1, 1)^3 - \frac{9}{4},$$

$$\int_0^1 \frac{x^3(\lg x)^2}{1-x} dx = 2S(1, 1)^3 - \frac{251}{108},$$

$$\int_0^1 \frac{x^4(\lg x)^2}{1-x} dx = 2S(1, 1)^3 - \frac{2035}{864},$$

$$\int_0^1 \frac{x^5(\lg x)^2}{1-x} dx = 2S(1, 1)^3 - \frac{286103}{108000},$$

$$\int_0^1 \frac{x^m(\lg x)^2}{1-x} dx = 2S(1, 1)^3 - 2\sum_1^m \frac{1}{u^3}.$$

Durch Vereinigung dieser Ausdrücke entsteht:

2)

$$\int_0^1 \frac{(1-x^{m+1})(\lg x)^2}{(1-x)^2} dx = 2(m+1)^3 S(1, 1)^3 - 2\sum_1^m \frac{m-u+1}{u^3},$$

und hieraus:

$$\int_0^1 \frac{(1-x^2)(\lg x)^2}{(1-x)^2} dx = 4S(1, 1)^3 - 2,$$

$$\int_0^1 \frac{(1-x^3)(\lg x)^2}{(1-x)^2} dx = 6S(1, 1)^3 - \frac{17}{4},$$

$$\int_0^1 \frac{(1-x^4)(\lg x)^2}{(1-x)^2} dx = 8S(1, 1)^3 - \frac{355}{54},$$

$$\int_0^1 \frac{(1-x^5)(\lg x)^2}{(1-x)^2} dx = 10S(1, 1)^3 - \frac{7715}{864},$$

u. s. w.

Eben so erhält man:

3)

$$\int_0^1 \frac{(\sum_0^m a_u x^u)(\lg x)^2}{1-x} dx = 2(\sum_0^m a_u) S(1, 1)^3 - 2\sum_1^m a_u (\sum_1^u \frac{1}{u^3}),$$

woraus sich folgende Integrale nach der in §. 31. angegebenen Methode ableiten:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{(1+x)(\lg x)^2}{1-x} dx &= 4S(1, 1)^3 - 2, \\
\int_0^1 \frac{(1+x)^2(\lg x)^2}{1-x} dx &= 8S(1, 1)^3 - \frac{25}{4}, \\
\int_0^1 \frac{(1+x)^3(\lg x)^2}{1-x} dx &= 16S(1, 1)^3 - \frac{407}{27}, \\
\int_0^1 \frac{(1+x)^4(\lg x)^2}{1-x} dx &= 32S(1, 1)^3 - \frac{28643}{864}, \\
&\text{u. s. w.}
\end{aligned}$$

Hierin ist $S(1, 1)^3 = 1,2020569031595942\dots$

Wird $r=3$ und $m=0, 1, 2, \dots$ in Nr. 2) §. 31. gesetzt, so gewinnt man folgende Integrale:

$$\begin{aligned}
&4) \\
\int_0^1 \frac{(\lg x)^3}{1-x} dx &= -6S(1, 1)^4 = -\frac{\pi^4}{15}, \\
\int_0^1 \frac{x(\lg x)^3}{1-x} dx &= -\frac{\pi^4}{15} + 6, \\
\int_0^1 \frac{x^2(\lg x)^3}{1-x} dx &= -\frac{\pi^4}{15} + \frac{51}{8}, \\
\int_0^1 \frac{x^3(\lg x)^3}{1-x} dx &= -\frac{\pi^4}{15} + \frac{1393}{216}, \\
\int_0^1 \frac{x^4(\lg x)^3}{1-x} dx &= -\frac{\pi^4}{15} + \frac{22369}{3456}, \\
\int_0^1 \frac{x^5(\lg x)^3}{1-x} dx &= -\frac{\pi^4}{15} + \frac{14001361}{2160000}, \\
&\text{u. s. w.}
\end{aligned}$$

Eben so ergibt sich durch Vereinigung der in Nr. 4) angegebenen Resultate:

$$\begin{aligned}
&5) \\
\int_0^1 \frac{(1-x^2)(\lg x)^3}{(1-x)^2} dx &= -\frac{2\pi^4}{15} + 6, \\
\int_0^1 \frac{(1-x^3)(\lg x)^3}{(1-x)^2} dx &= -\frac{\pi^4}{5} + \frac{99}{8}, \\
\int_0^1 \frac{(1-x^4)(\lg x)^3}{(1-x)^2} dx &= -\frac{4\pi^4}{15} + \frac{2033}{108}, \\
\int_0^1 \frac{(1-x^5)(\lg x)^3}{(1-x)^2} dx &= -\frac{\pi^4}{3} + \frac{87425}{3456}, \\
&\dots\dots\dots \\
\int_0^1 \frac{(1-x^{m+1})(\lg x)^3}{(1-x)^2} dx &= -\frac{(m+1)\pi^4}{15} + 6 \cdot \sum_1^m \frac{m-u+1}{u^4}.
\end{aligned}$$

Ferner:

6)

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{(1+x)(\lg x)^2}{1-x} dx &= -\frac{2\pi^4}{15} + 6, \\ \int_0^1 \frac{(1+x)^2(\lg x)^2}{1-x} dx &= -\frac{4\pi^4}{15} + \frac{147}{8}, \\ \int_0^1 \frac{(1+x)^3(\lg x)^2}{1-x} dx &= -\frac{8\pi^4}{15} + \frac{2359}{64}, \\ \int_0^1 \frac{(1+x)^4(\lg x)^2}{1-x} dx &= -\frac{16\pi^4}{15} + \frac{326657}{3456}, \\ &\dots\dots\dots\end{aligned}$$

$$\int_0^1 \frac{(\sum_0^m a_u x^u)(\lg x)^2}{1-x} dx = -(\sum_0^m a_u) \frac{\pi^4}{15} + 6 \sum_1^m a_u \left(\sum_1^u \frac{1}{u^4} \right)$$

Hierin ist $S(1, 1)^4 = \frac{\pi^4}{90} = 1,0623232337111382 \dots$

Aus Nr. 3) §. 31. erhält man ferner:

7)

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^{mp+p-1}(\lg x)^2}{1-x^p} dx &= \frac{2S(1, 1)^3}{p^3} - \frac{2}{p^3} \sum_1^m \frac{1}{u^3}, \\ \int_0^1 \frac{x^{mp+p-1}(\lg x)^3}{1-x^p} dx &= -\frac{6S(1, 1)^4}{p^3} + \frac{6}{p^4} \sum_1^m \frac{1}{u^4}, \\ &\dots\dots\dots\end{aligned}$$

8)

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^{p-1}(1-x^{mp+p})(\lg x)^2}{(1-x^p)^2} dx &= \frac{2(m+1)S(1, 1)^3}{p^3} - \frac{2}{p^3} \sum_1^m \frac{m-u+1}{u^3}, \\ \int_0^1 \frac{x^{p-1}(1-x^{mp+p})(\lg x)^3}{(1-x^p)^2} dx &= -\frac{6(m+1)S(1, 1)^4}{p^4} + \frac{6}{p^4} \sum_1^m \frac{m-u+1}{u^4}, \\ &\dots\dots\dots\end{aligned}$$

9)

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^{p-1}(\sum_0^m a_{pu} x^{pu})(\lg x)^2}{1-x^p} dx &= \frac{2}{p^3} (\sum_0^m a_{pu}) S(1, 1)^3 \\ &\quad - \frac{2}{p^3} \sum_1^m a_{pu} \left(\sum_1^u \frac{1}{u^3} \right), \\ \int_0^1 \frac{x^{p-1}(\sum_0^m a_{pu} x^{pu})(\lg x)^3}{1-x^p} dx &= -\frac{6}{p^4} (\sum_0^m a_{pu}) S(1, 1)^4 \\ &\quad + \frac{6}{p^4} \sum_1^m a_{pu} \left(\sum_1^u \frac{1}{u^4} \right),\end{aligned}$$

u. s. w.

Die Zahlenausdrücke, worauf die in Nr. 7)–9) angegebenen Integrale führen, sind dieselben, wie sie in Nr. 1)–6) angeführt sind. Hiezu treten dann noch die vorgeschriebenen Coefficienten.

§. 33.

Setzt man x statt z in Nr. 2) und Nr. 3) §. 2. und verbindet die hieraus entstehenden Resultate mit $\int_0^1 x^{2m} (\lg x)^r \partial x$ und $\int_0^1 x^{2m+1} (\lg x)^r \partial x$, so erhält man:

1)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^{2m} (\lg x)^r \partial x}{1+x} &= \int_0^1 (\lg x)^r (x^{2m-1} - x^{2m-2} \dots - 1) \partial x + \int_0^1 \frac{(\lg x)^r \partial x}{1+x}, \\ &\quad \int_0^1 \frac{x^{2m+1} (\lg x)^r \partial x}{1+x} \\ &= \int_0^1 (\lg x)^r (x^{2m} - x^{2m-1} \dots - x + 1) \partial x - \int_0^1 \frac{(\lg x)^r \partial x}{1+x}. \end{aligned}$$

Werden nun die einzelnen Glieder nach Nr. 1) §. 19. integrirt und werden die Werthe für die begleitenden Integrale aus Nr. 15) §. 21. eingeführt, so ergeben sich hieraus folgende Integralformen:

2)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^{2m} (\lg x)^r \partial x}{1+x} &= (-)^r \cdot 1^{r+1} \cdot S'(1, 1)^{r+1} \\ &\quad (-)^{r+1} \cdot 1^{r+1} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{r+1}} + \frac{1}{3^{r+1}} - \dots - \frac{1}{(2m)^{r+1}}\right), \end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^{2m+1} (\lg x)^r \partial x}{1+x} &= (-)^{r+1} \cdot 1^{r+1} \cdot S'(1, 1)^{r+1} \\ &\quad (-)^r \cdot 1^{r+1} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{r+1}} + \frac{1}{3^{r+1}} - \dots + \frac{1}{(2m+1)^{r+1}}\right). \end{aligned}$$

Hienit stimmt die in §. 22. Nr. 2) gegebene Gleichung überein, wornach ist:

4)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^{mp+p-1} (\lg x)^r \partial x}{1+x^p} &= (-)^{m+r} \cdot \frac{1^{r+1}}{p^{r+1}} \cdot S'(1, 1)^{r+1} \\ &\quad (-)^{m+r+1} \cdot \frac{1^{r+1}}{p^{r+1}} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{r+1}} + \frac{1}{3^{r+1}} \dots (-)^{m-1} \frac{1}{m^{r+1}}\right) \end{aligned}$$

Hieraus entnehmen sich für $r=1$ und $m=0, 1, 2, \dots$ folgende Integrale:

$$\int_0^1 \frac{\lg x}{1+x} dx \quad 5) = -S'(1, 1)^2 = -\frac{\pi^2}{12},$$

$$\int_0^1 \frac{x \lg x}{1+x} dx = \frac{\pi^2}{12} - 1,$$

$$\int_0^1 \frac{x^2 \lg x}{1+x} dx = -\frac{\pi^2}{12} + \frac{3}{4},$$

$$\int_0^1 \frac{x^3 \lg x}{1+x} dx = +\frac{\pi^2}{12} - \frac{31}{36},$$

$$\int_0^1 \frac{x^4 \lg x}{1+x} dx = -\frac{\pi^2}{12} + \frac{115}{144},$$

$$\int_0^1 \frac{x^5 \lg x}{1+x} dx = +\frac{\pi^2}{12} - \frac{3019}{3600},$$

$$\int_0^1 \frac{x^6 \lg x}{1+x} dx = -\frac{\pi^2}{12} + \frac{973}{1200},$$

$$\int_0^1 \frac{x^{2m} \lg x}{1+x} dx = -\frac{\pi^2}{12} + \sum_1^{2m} (-)^{u-1} \frac{1}{u^2},$$

$$\int_0^1 \frac{x^{2m+1} \lg x}{1+x} dx = \frac{\pi^2}{12} - \sum_1^{2m+1} (-)^{u-1} \frac{1}{u^2}.$$

Werden die in Nr. 5) erhaltenen Ausdrücke, um Harmonie in die Zeichen zu bringen, der Reihe nach mit abwechselnden Zeichen verbunden, so entsteht:

$$\int_0^1 \frac{(1(-)^m x^{m+1}) \lg x}{(1+x)^2} dx = -\frac{(m+1)\pi^2}{12} + \sum_1^m (-)^{u-1} \frac{m-u+1}{u^2}, \quad 6)$$

woraus sich folgende Integrale ableiten:

$$\int_0^1 \frac{(1-x^2) \lg x}{(1+x)^2} dx = -\frac{\pi^2}{6} + 1, \quad 7)$$

$$\int_0^1 \frac{(1+x^3) \lg x}{(1+x)^2} dx = -\frac{\pi^2}{4} + \frac{7}{4},$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{(1-x^4)\lg x}{(1+x)^2} dx &= -\frac{\pi^2}{3} + \frac{47}{18}, \\ \int_0^1 \frac{(1+x^5)\lg x}{(1+x)^2} dx &= -\frac{5\pi^2}{12} + \frac{491}{144}, \\ \int_0^1 \frac{(1-x^6)\lg x}{(1+x)^2} dx &= -\frac{\pi^2}{2} + \frac{2549}{600}, \\ \int_0^1 \frac{(1+x^7)\lg x}{(1+x)^2} dx &= -\frac{7\pi^2}{12} + \frac{24259}{4800},\end{aligned}$$

u. s. w.

Werden aber diese Ausdrücke der Reihe nach mit $a_0, -a_1, a_2, -a_3, \dots$ verbunden und vereinigt, so erhält man:

8)

$$\int_0^1 \frac{(\sum_0^m (-)^u a_u x^u) \lg x}{1+x} dx = -(\sum_0^m a_u) \frac{\pi^2}{12} + \sum_1^m a_u (\sum_1^u (-)^{u-1} \frac{1}{u^2}).$$

Hieraus leiten sich folgende Integrale ab, wenn man die Vorzeichen der Potenzen des Binomiums $(1-x)$ benutzt:

9)

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{(1-x)\lg x}{1+x} dx &= -\frac{\pi^2}{6} + 1, \\ \int_0^1 \frac{(1-x)^2 \lg x}{1+x} dx &= -\frac{\pi^2}{3} + \frac{11}{4}, \\ \int_0^1 \frac{(1-x)^3 \lg x}{1+x} dx &= -\frac{2\pi^2}{3} + \frac{55}{9}, \\ \int_0^1 \frac{(1-x)^4 \lg x}{1+x} dx &= -\frac{4\pi^2}{3} + \frac{1835}{144},\end{aligned}$$

u. s. w.

Aus Nr. 4) erhält man folgende Formen:

10)

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^{2m+1} \lg x}{1+x^2} dx &= (-)^{m+1} \frac{1}{4} S'(1, 1)^2 (-)^{m+2} \frac{1}{4} \sum_1^m (-)^{u-1} \frac{1}{u^2}, \\ \int_0^1 \frac{x^{2m+2} \lg x}{1+x^2} dx &= (-)^{m+1} \frac{1}{6} S'(1, 1)^2 (-)^{m+2} \frac{1}{6} \sum_1^m (-)^{u-1} \frac{1}{u^2},\end{aligned}$$

u. s. w.

11)

$$\int_0^1 \frac{x(1(-)^m x^{2m+2}) \lg x}{(1+x^2)^2} dx = -\frac{(m+1)\pi^2}{4 \cdot 12} + \frac{1}{4} \Sigma_1^m (-)^{u-1} \frac{m-u+1}{u^2},$$

$$\int_0^1 \frac{x^2(1(-)^m x^{2m+2}) \lg x}{(1+x^2)^2} dx = -\frac{(m+1)\pi^2}{9 \cdot 12} + \frac{1}{9} \Sigma_1^m (-)^{u-1} \frac{m-u+1}{u^2},$$

u. s. w.

12)

$$\int_0^1 \frac{x(\Sigma_0^m (-)^u a_{2u} x^{2u}) \lg x}{1+x^2} dx = -\frac{(\Sigma_0^m a_{2u}) \pi^2}{4 \cdot 12} + \frac{1}{4} \Sigma_1^m a_{2u} (\Sigma_1^m (-)^{u-1} \frac{1}{u^2}),$$

$$\int_0^1 \frac{x^2(\Sigma_0^m (-)^u a_{2u} x^{2u}) \lg x}{1+x^2} dx = -\frac{(\Sigma_0^m a_{2u}) \pi^2}{9 \cdot 12} + \frac{1}{9} \Sigma_1^m a_{2u} (\Sigma_1^m (-)^{u-1} \frac{1}{u^2}),$$

u. s. w.

Die Zahlenwerthe bleiben mit Ausnahme der vorgeschriebenen Coefficienten die gleichen, wie sie oben angegeben wurden.

§. 34.

Setzt man $r = 2$ in Nr. 2) und Nr. 3) §. 33., so erhält man:

1)

$$\int_0^1 \frac{x^{2m} (\lg x)^2}{1+x} dx = 2S'(1, 1)^3 - 2(1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \dots - \frac{1}{(2m)^3}),$$

2)

$$\int_0^1 \frac{x^{2m+1} (\lg x)^2}{1+x} dx = -2S'(1, 1)^3 + 2(1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \dots + \frac{1}{(2m+1)^3}).$$

Aus Nr. 4) §. 33. entsteht:

3)

$$\int_0^1 \frac{x^{mp+p-1} (\lg x)^2}{1+x^p} dx = (-)^m \frac{2}{p^3} S'(1, 1)^3 (-)^{m+1} \frac{2}{p^3} \Sigma_1^m (-)^{u-1} \frac{1}{u^3}.$$

Aus Nr. 1) und Nr. 2) leiten sich folgende Integrale ab:

4)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{(\lg x)^2}{1+x} dx &= 2S'(1, 1)^3, \\
\int_0^1 \frac{x(\lg x)^2}{1+x} dx &= -2S'(1, 1)^3 + 2, \\
\int_0^1 \frac{x^2(\lg x)^2}{1+x} dx &= 2S'(1, 1)^3 - \frac{7}{4}, \\
\int_0^1 \frac{x^3(\lg x)^2}{1+x} dx &= -2S'(1, 1)^3 + \frac{197}{108}, \\
\int_0^1 \frac{x^4(\lg x)^2}{1+x} dx &= 2S'(1, 1)^3 - \frac{1549}{864}, \\
\int_0^1 \frac{x^5(\lg x)^2}{1+x} dx &= -2S'(1, 1)^3 - \frac{195353}{108000},
\end{aligned}$$

u. s. w.

Durch Verbindung dieser Ausdrücke unter sich mit abwechselnden Zeichen folgt sich das Integral:

5)

$$\int_0^1 \frac{(1(-)^m x^{m+1})(\lg x)^2}{(1+x)^2} dx = 2(m+1)S'(1, 1)^3 - 2 \sum_1 m! (-)^{u-1} \frac{m-u+1}{u^3},$$

woraus sich folgende Integrale ableiten:

6)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{(1-x^2)(\lg x)^2}{(1+x)^2} dx &= 4S'(1, 1)^3 - 2, \\
\int_0^1 \frac{(1+x^3)(\lg x)^2}{(1+x)^2} dx &= 6S'(1, 1)^3 - \frac{15}{4}, \\
\int_0^1 \frac{(1-x^4)(\lg x)^2}{(1+x)^2} dx &= 8S'(1, 1)^3 - \frac{301}{54}, \\
\int_0^1 \frac{(1+x^5)(\lg x)^2}{(1+x)^2} dx &= 10S'(1, 1)^3 - \frac{6365}{864},
\end{aligned}$$

u. s. w.

Eben so erhält man:

7)

$$\int_0^1 \frac{(\sum_0^m (-)^u a_u x^u) (\lg x)^2}{1+x} dx$$

$$= 2(\sum_0^m a_u) S'(1, 1)^2 - 2\sum_1^m a_u (\sum_1^u (-)^{u-1} \frac{1}{u^2}).$$

Hieraus leiten sich mit Benutzung der Binomial-Coefficienten folgende Integrale ab:

8)

$$\int_0^1 \frac{(1-x)(\lg x)^2}{1+x} dx = 4S'(1, 1)^2 - 2,$$

$$\int_0^1 \frac{(1-x)^2(\lg x)^2}{1+x} dx = 8S'(1, 1)^2 - \frac{23}{4},$$

$$\int_0^1 \frac{(1-x)^3(\lg x)^2}{1+x} dx = 16S'(1, 1)^2 - \frac{353}{27},$$

$$\int_0^1 \frac{(1-x)^4(\lg x)^2}{1+x} dx = 32S'(1, 1)^2 - \frac{23837}{864},$$

u. s. w.

Aus Nr. 4) erhält man durch Befolgung derselben Methode:

9)

$$\int_0^1 \frac{x^{mp+p-1} (\lg x)^2}{1+x^p} dx = (-)^m \cdot \frac{2}{p^2} S'(1, 1)^2 (-)^{m+1} \frac{2}{p^2} \sum_1^m (-)^{u-1} \frac{1}{u^2},$$

10)

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1} (1 - (-)^m x^{mp+p}) (\lg x)^2}{(1+x^p)^2} dx$$

$$= \frac{2(m+1) S'(1, 1)^2}{p^2} - \frac{2}{p^2} \sum_1^m (-)^{u-1} \frac{m-u+1}{u^2},$$

11)

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1} (\sum_0^m (-)^u a_{pu} x^{pu}) (\lg x)^2}{1+x^p} dx$$

$$= \frac{2}{p^2} (\sum_0^m a_{pu}) S'(1, 1)^2 - \frac{2}{p^2} \sum_1^m a_{pu} (\sum_1^u (-)^{u-1} \frac{1}{u^2}).$$

Hierin ist $S'(1, 1)^2 = 0,9015426773696957 \dots$

§. 35.

Setzt man $r=3$ in No. 2), 3) und 4) §. 33., so erhält man folgende Formen:

1)

$$\int_0^1 \frac{x^{2m} (\lg x)^3}{1+x} dx = -6S'(1, 1)^4 + 6\left(1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \dots - \frac{1}{(2m)^4}\right),$$

2)

$$\int_0^1 \frac{x^{2m+1} (\lg x)^3}{1+x} dx = +6S'(1, 1)^4 - 6\left(1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \dots + \frac{1}{(2m+1)^4}\right),$$

3)

$$\int_0^1 \frac{x^{mp+p-1} (\lg x)^3}{1+x^p} dx = (-)^{m+1} \frac{6}{p^4} S'(1, 1)^4 (-)^m \frac{6}{p^4} \Sigma_1^m (-)^{u-1} \frac{1}{u^4}.$$

Aus Nr. 1) und Nr. 2) ergeben sich folgende Integrale:

4)

$$\int_0^1 \frac{(\lg x)^3}{1+x} dx = -6S'(1, 1)^4 = -\frac{7\pi^4}{120},$$

$$\int_0^1 \frac{x (\lg x)^3}{1+x} dx = \frac{7\pi^4}{120} - 6,$$

$$\int_0^1 \frac{x^2 (\lg x)^3}{1+x} dx = -\frac{7\pi^4}{120} + \frac{45}{8},$$

$$\int_0^1 \frac{x^3 (\lg x)^3}{1+x} dx = \frac{7\pi^4}{120} - \frac{1231}{216},$$

$$\int_0^1 \frac{x^4 (\lg x)^3}{1+x} dx = -\frac{7\pi^4}{120} + \frac{19615}{3456},$$

$$\int_0^1 \frac{x^5 (\lg x)^3}{1+x} dx = \frac{7\pi^4}{120} - \frac{12280111}{2160000},$$

u. s. w.

Durch Vereinigung dieser Ausdrücke mit abwechselnden Zeichen erhält man:

5)

$$\int_0^1 \frac{(1(-)^m x^{m+1}) (\lg x)^3}{(1+x)^2} dx = -\frac{(m+1) \cdot 7\pi^4}{120} + 6 \cdot \Sigma_1^m (-)^{u-1} \frac{m-u+1}{u^4},$$

woraus sich folgende Integrale ableiten:

6)

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{(1-x^2)(\lg x)^3}{(1+x)^2} dx &= -\frac{7\pi^4}{60} + 6, \\ \int_0^1 \frac{(1+x^2)(\lg x)^3}{(1+x)^2} dx &= -\frac{7\pi^4}{40} + \frac{93}{8}, \\ \int_0^1 \frac{(1-x^4)(\lg x)^3}{(1+x)^2} dx &= -\frac{7\pi^4}{30} + \frac{1871}{108}, \\ \int_0^1 \frac{(1+x^6)(\lg x)^3}{(1+x)^2} dx &= -\frac{7\pi^4}{24} + \frac{79487}{3456},\end{aligned}$$

u. s. w.

Ferner erhält man:

7)

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{(\Sigma_0^m (-)^u a_u x^u)(\lg x)^3}{1+x} dx \\ = -(\Sigma_0^m a_u) \frac{7\pi^4}{120} + 6 \Sigma_1^m a_u (\Sigma_1^u (-)^{u-1} \frac{1}{u^4}).\end{aligned}$$

Dies führt zu folgenden Integralen:

8)

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{(1-x)(\lg x)^3}{1+x} dx &= -\frac{7\pi^4}{60} + 6, \\ \int_0^1 \frac{(1-x)^2(\lg x)^3}{1+x} dx &= -\frac{7\pi^4}{30} + \frac{141}{8}, \\ \int_0^1 \frac{(1-x)^3(\lg x)^3}{1+x} dx &= -\frac{7\pi^4}{15} + \frac{2191}{54}, \\ \int_0^1 \frac{(1-x^4)(\lg x)^3}{1+x} dx &= -\frac{14\pi^4}{15} + \frac{297983}{3456},\end{aligned}$$

u. s. w.

Ferner erhält man auf dieselbe Weise folgende Integralformen aus Nr. 3):

9)

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^{p-1}(1-(-)^m x^{mp+p})(\lg x)^3}{(1+x^p)^2} dx \\ = -\frac{(m+1) \cdot 7\pi^4}{p^4 \cdot 120} + \frac{6}{p^4} \Sigma_1^m (-)^{u-1} \frac{m-u+1}{u^4},\end{aligned}$$

10)

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^{p-1}(\Sigma_0^m (-)^u a_{pu} x^{pu})(\lg x)^3}{1+x^p} dx \\ = -\frac{(\Sigma_0^m a_u) \cdot 7\pi^4}{p^4 \cdot 120} + \frac{6}{p^4} \Sigma_1^m a_{pu} (\Sigma_1^u (-)^{u-1} \frac{1}{u^4}).\end{aligned}$$

$$\int_0^1 \frac{(\sum_0^m a_{2u+1} x^{2u+1}) \lg x}{1-x^2} dx = -(\sum_0^m a_{2u+1}) \frac{\pi^2}{24} + \frac{1}{2} \sum_1^m a_{2u+1} (\sum_1^u \frac{1}{u^2}).$$

Auch hier lassen sich, wie in §. 31. — 35. geschah, aus der Gleichung Nr. 5) §. 22. noch andere Integrale ableiten. Ihre Darstellung unterliegt aber nach dem früheren Vorgange keiner weiteren Schwierigkeit. Deswegen werden sie hier und auch künftig nicht weiter berücksichtigt.

§. 37.

Setzt man $r=2$ und $m=0, 1, 2, \dots$ in Nr. 3) §. 36., so ergeben sich folgende Integrale:

1)

$$\int_0^1 \frac{(\lg x)^2}{1-x^2} dx = 2S(1, 2)^2,$$

$$\int_0^1 \frac{x^2 (\lg x)^2}{1-x^2} dx = 2S(1, 2)^2 - 2,$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^4 (\lg x)^2}{1-x^2} dx &= 2S(1, 2)^3 - \frac{56}{27}, \\
\int_0^1 \frac{x^6 (\lg x)^2}{1-x^2} dx &= 2S(1, 2)^3 - \frac{7054}{3375}, \\
\int_0^1 \frac{x^8 (\lg x)^2}{1-x^2} dx &= 2S(1, 2)^3 - \frac{2426272}{1157625}, \\
&\dots\dots\dots \\
\int_0^1 \frac{x^{2m} (\lg x)^2}{1-x^2} dx &= 2S(1, 2)^3 - 2\Sigma_1^m \frac{1}{(2u-1)^3}.
\end{aligned}$$

Hieran schliessen sich durch Summirung folgende Integrale:

2)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{(1-x^4) (\lg x)^2}{(1-x^2)^2} dx &= 4S(1, 2)^3 - 2, \\
\int_0^1 \frac{(1-x^6) (\lg x)^2}{(1-x^2)^2} dx &= 6S(1, 2)^3 - \frac{110}{27}, \\
\int_0^1 \frac{(1-x^8) (\lg x)^2}{(1-x^2)^2} dx &= 8S(1, 2)^3 - \frac{20804}{3375}, \\
\int_0^1 \frac{(1-x^{10}) (\lg x)^2}{(1-x^2)^2} dx &= 10S(1, 2)^3 - \frac{3187348}{385875}, \\
&\dots\dots\dots \\
\int_0^1 \frac{(1-x^{2m+2}) (\lg x)^2}{(1-x^2)^2} dx &= 2(m+1) S(1, x)^3 - 2\Sigma_1^m \frac{m-u+1}{(2u-1)^3}.
\end{aligned}$$

Ferner ist:

3)

$$\int_0^1 \frac{(\Sigma_0^m a_{2u} x^{2u}) (\lg x)^2}{1-x^2} dx = 2(\Sigma_0^m a_{2u}) S(1, 2)^3 - 2\Sigma_1^m a_{2u} (\Sigma_1^u \frac{1}{(2u-1)^3}),$$

woraus sich mit Hülfe der Binomial-Coefficienten folgende Integrale ableiten:

4)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{(1+x^2) (\lg x)^2}{1-x^2} dx &= 4S(1, 2)^3 - 2, \\
\int_0^1 \frac{(1+x^2)^2 (\lg x)^2}{1-x^2} dx &= 8S(1, 2)^3 - \frac{164}{27}, \\
\int_0^1 \frac{(1+x^2)^3 (\lg x)^2}{1-x^2} dx &= 16S(1, 2)^3 - \frac{48304}{3375}, \\
\int_0^1 \frac{(1+x^2)^4 (\lg x)^2}{1-x^2} dx &= 32S(1, 2)^3 - \frac{7154272}{231525},
\end{aligned}$$

u. s. w.

$$\int_0^1 \frac{x(1-x^4)(\lg x)^2}{(1-x^2)^2} dx = \frac{1}{4}S(1, 1)^2 - \frac{1}{4},$$

$$\int_0^1 \frac{x(1-x^6)(\lg x)^2}{(1-x^2)^2} dx = \frac{1}{4}S(1, 1)^2 - \frac{17}{32},$$

$$\int_0^1 \frac{x(1-x^8)(\lg x)^2}{(1-x^2)^2} dx = S(1, 1)^2 - \frac{355}{432},$$

$$\int_0^1 \frac{x(1-x^{10})(\lg x)^2}{(1-x^2)^2} dx = \frac{1}{4}S(1, 1)^2 - \frac{7715}{6912},$$

.....

$$\int_0^1 \frac{x(1-x^{2m+2})(\lg x)^2}{(1-x^2)^2} dx = \frac{1}{4}(m+1)S(1, 1)^2 - \frac{1}{4}\sum_1^m \frac{m-u+1}{u^2}.$$

7)

$$\int_0^1 \frac{x(1+x^2)(\lg x)^2}{1-x^2} dx = \frac{1}{4}S(1, 1)^2 - \frac{1}{4},$$

$$\int_0^1 \frac{x(1+x^2)^2(\lg x)^2}{1-x^2} dx = S(1, 1)^2 - \frac{25}{32},$$

$$\int_0^1 \frac{x(1+x^2)^3(\lg x)^2}{1-x^2} dx = 2S(1, 1)^2 - \frac{407}{216},$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x(\lg x)^2}{1-x^2} dx &= -\frac{1}{2} S(1, 1)^2 = -\frac{\pi^2}{240}, \\
\int_0^1 \frac{x^3(\lg x)^2}{1-x^2} dx &= -\frac{\pi^2}{240} + \frac{3}{8}, \\
\int_0^1 \frac{x^5(\lg x)^2}{1-x^2} dx &= -\frac{\pi^2}{240} + \frac{51}{128}, \\
\int_0^1 \frac{x^7(\lg x)^2}{1-x^2} dx &= -\frac{\pi^2}{240} + \frac{1393}{3456}, \\
\int_0^1 \frac{x^9(\lg x)^2}{1-x^2} dx &= -\frac{\pi^2}{240} + \frac{22369}{55296}, \\
&\dots\dots\dots, \\
\int_0^1 \frac{x^{2m+1}(\lg x)^2}{1-x^2} dx &= -\frac{\pi^2}{240} + \frac{1}{2} \sum_1^m \frac{1}{u^4}.
\end{aligned}$$

Ferner erhält man:

6)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x(1-x^4)(\lg x)^2}{(1-x^2)^2} dx &= -\frac{\pi^2}{120} + \frac{3}{8}, \\
\int_0^1 \frac{x(1-x^6)(\lg x)^2}{(1-x^2)^2} dx &= -\frac{\pi^2}{80} + \frac{99}{128},
\end{aligned}$$

Hier kann $p=0, 1, 2$ sein. Werden die einzelnen Glieder auf der rechten Seite nach Nr. 1) §. 19. und $\int_0^1 \frac{x^p (\lg x)^r}{1-x^3} dx$ nach Nr. 8) §. 21. bestimmt und die hieraus folgenden Werthe eingeführt, so erhält man folgende drei Integralformen:

2)

$$\int_0^1 \frac{x^{3m} (\lg x)^r}{1-x^3} dx$$

$$= (-)^r \cdot 1^{r+1} S(1, 3)^{r+1} (-)^{r+1} 1^{r+1} \left(1 + \frac{1}{4^{r+1}} + \frac{1}{7^{r+1}} + \dots + \frac{1}{(3m-2)^{r+1}}\right),$$

3)

$$\int_0^1 \frac{x^{3m+1} (\lg x)^r}{1-x^3} dx$$

$$= (-)^r \cdot 1^{r+1} S(2, 3)^{r+1} (-)^{r+1} 1^{r+1} \left(\frac{1}{2^{r+1}} + \frac{1}{5^{r+1}} + \dots + \frac{1}{(3m-1)^{r+1}}\right),$$

4)

$$\int_0^1 \frac{x^{3m+2} (\lg x)^r}{1-x^3} dx$$

$$= (-)^r \cdot \frac{1^{r+1}}{3^{r+1}} S(1, 1)^{r+1} (-)^{r+1} \frac{1^{r+1}}{3^{r+1}} \left(1 + \frac{1}{2^{r+1}} + \frac{1}{3^{r+1}} + \dots + \frac{1}{m^{r+1}}\right).$$

Hieraus leiten sich folgende Integrale für $r=1$ und $m=0, 1, 2, \dots$ ab:

5)

$$\int_0^1 \frac{\lg x}{1-x^3} dx = -S(1, 3)^2,$$

$$\int_0^1 \frac{x \lg x}{1-x^3} dx = -S(2, 3)^2,$$

$$\int_0^1 \frac{x^2 \lg x}{1-x^3} dx = -\frac{1}{9} S(1, 1)^2 = -\frac{\pi^2}{54},$$

$$\int_0^1 \frac{x^3 \lg x}{1-x^3} dx = -S(1, 3)^2 + 1,$$

$$\int_0^1 \frac{x^4 \lg x}{1-x^3} dx = -S(2, 3)^2 + \frac{1}{4},$$

$$\int_0^1 \frac{x(\lg x)^2}{1-x^3} dx = 2S(2, 3)^2,$$

$$\int_0^1 \frac{x^2(\lg x)^2}{1-x^3} dx = \frac{2}{27} S(1, 1)^2,$$

$$\int_0^1 \frac{x^3(\lg x)^2}{1-x^3} dx = 2S(1, 3)^2 - 2,$$

$$\int_0^1 \frac{x^4(\lg x)^2}{1-x^3} dx = 2S(2, 3)^2 - \frac{1}{4},$$

$$\int_0^1 \frac{x^5(\lg x)^2}{1-x^3} dx = \frac{2}{27} S(1, 1)^2 - \frac{2}{27},$$

$$\int_0^1 \frac{x^6(\lg x)^2}{1-x^3} dx = 2S(1, 3)^2 - \frac{65}{32},$$

$$\int_0^1 \frac{x^7(\lg x)^2}{1-x^3} dx = 2S(2, 3)^2 - \frac{133}{500},$$

$$\int_0^1 \frac{x^8(\lg x)^2}{1-x^3} dx = \frac{2}{27} S(1, 1)^2 - \frac{1}{12},$$

$$=(-)^{r+1}1^{r+1}S'(2,3)^{r+1}(-)^r1^{r+1}\left(\frac{1}{2^{r+1}}-\frac{1}{5^{r+1}}+\frac{1}{8^{r+1}}-\dots+\frac{1}{(6m+2)^{r+1}}\right).$$

8)

$$\int_0^1 \frac{x^{6m+5}(\lg x)^r}{1+x^3} dx$$

$$=(-)^{r+1}\frac{1^{r+1}}{3^{r+1}}S'(1,1)^{r+1}(-)^r\frac{1^{r+1}}{3^{r+1}}\left(1-\frac{1}{2^{r+1}}+\frac{1}{3^{r+1}}-\dots+\frac{1}{(2m+1)^{r+1}}\right).$$

Hieraus ergeben sich folgende Integrale, wenn $r=1$, $m=0$, $1, 2, 3, \dots$ gesetzt wird:

9)

$$\int_0^1 \frac{\lg x}{1+x^3} dx = -S'(1,3)^2,$$

$$\int_0^1 \frac{x \lg x}{1+x^3} dx = -S'(2,3)^2,$$

$$\int_0^1 \frac{x^2 \lg x}{1+x^3} dx = -\frac{1}{9}S'(1,1)^2 = -\frac{\pi^2}{108},$$

$$\int_0^1 \frac{x^3 \lg x}{1+x^3} dx = S'(1, 3)^2 - 1,$$

$$\int_0^1 \frac{x^4 \lg x}{1+x^3} dx = S'(2, 3)^2 - \frac{1}{4},$$

$$\int_0^1 \frac{x^5 \lg x}{1+x^3} dx = \frac{\pi^2}{108} - \frac{1}{9},$$

$$\int_0^1 \frac{x^6 \lg x}{1+x^3} dx = -S'(1, 3)^2 + \frac{15}{16},$$

$$\int_0^1 \frac{x^7 \lg x}{1+x^3} dx = -S'(2, 3)^2 + \frac{21}{100},$$

$$\int_0^1 \frac{x^8 \lg x}{1+x^3} dx = -\frac{\pi^2}{108} + \frac{1}{12},$$

$$\int_0^1 \frac{x^9 \lg x}{1+x^3} dx = S'(1, 3)^2 - \frac{751}{784},$$

$$\int_0^1 \frac{x^{10} \lg x}{1+x^3} dx = S'(2, 3)^2 - \frac{361}{1600},$$

u. s. w.

Wird $r = 2$, $m = 0, 1, 2, \dots$ gesetzt, so erhält man folgende Integrale:

10)

$$\int_0^1 \frac{(\lg x)^2}{1+x^3} dx = 2S'(1, 3)^3,$$

$$\int_0^1 \frac{x (\lg x)^2}{1+x^3} dx = 2S'(2, 3)^3,$$

$$\int_0^1 \frac{x^2 (\lg x)^2}{1+x^3} dx = \frac{2}{27} S'(1, 1)^3,$$

$$\int_0^1 \frac{x^3 (\lg x)^2}{1+x^3} dx = -2S'(1, 3)^3 + 2,$$

$$\int_0^1 \frac{x^4 (\lg x)^2}{1+x^3} dx = -2S'(2, 3)^3 + \frac{1}{4},$$

$$\int_0^1 \frac{x^5 (\lg x)^2}{1+x^3} dx = -\frac{2}{27} S'(1, 1)^3 + \frac{2}{27},$$

$$\int_0^1 \frac{x^6 (\lg x)^2}{1+x^3} dx = 2S'(1, 3)^3 - \frac{63}{32},$$

$$\int_0^1 \frac{x^7 (\lg x)^2}{1+x^8} dx = 2S'(2, 3)^2 - \frac{117}{500},$$

$$\int_0^1 \frac{x^8 (\lg x)^2}{1+x^8} dx = \frac{2}{27} S'(1, 1)^2 - \frac{7}{108},$$

$$\int_0^1 \frac{x^9 (\lg x)^2}{1+x^8} dx = -2S'(1, 3)^2 + \frac{21673}{10976},$$

$$\int_0^1 \frac{x^{10} (\lg x)^2}{1+x^8} dx = -2S'(2, 3)^2 + \frac{7613}{32000},$$

u. s. w.

Die Werthe für $S'(1, 3)^2$, $S'(2, 3)^2$, sind in §. 27. angegeben.

Man kann diese Entwickelungsweise weiter fortführen und hiezu die Gleichungen des §. 2. und des §. 21. benutzen. Man erhält für $\int_0^1 \frac{x^{4m+r} (\lg x)^r}{1+x^4} dx$ folgende Integralformen:

11)

$$\int_0^1 \frac{x^{4m} (\lg x)^r}{1-x^4} dx$$

$$= (-)^r 1^{r+1} S(1, 4)^{r+1} (-)^{r+1} 1^{r+1} \left(1 + \frac{1}{5^{r+1}} + \frac{1}{9^{r+1}} + \dots \frac{1}{(4m-3)^{r+1}} \right)$$

$$\int_0^1 \frac{x^{4m+1} (\lg x)^r}{1-x^4} dx$$

$$= (-)^r 1^{r+1} S(2, 4)^{r+1} (-)^{r+1} 1^{r+1} \left(\frac{1}{2^{r+1}} + \frac{1}{6^{r+1}} + \dots \frac{1}{(4m-2)^{r+1}} \right)$$

$$\int_0^1 \frac{x^{4m+2} (\lg x)^r}{1-x^4} dx$$

$$= (-)^r 1^{r+1} S(3, 4)^{r+1} (-)^{r+1} 1^{r+1} \left(\frac{1}{3^{r+1}} + \frac{1}{7^{r+1}} + \dots \frac{1}{(4m-1)^{r+1}} \right)$$

$$\int_0^1 \frac{x^{4m+3} (\lg x)^r}{1-x^4} dx$$

$$= (-)^r \frac{1^{r+1}}{4^{r+1}} S(1, 1)^{r+1} (-)^{r+1} \frac{1^{r+1}}{4^{r+1}} \left(1 + \frac{1}{2^{r+1}} + \frac{1}{3^{r+1}} + \dots \frac{1}{m^{r+1}} \right).$$

12)

$$\int_0^1 \frac{x^{4m} (\lg x)^r}{1+x^4} dx = (-)^{m+r} \frac{1}{r+1} S'(1, 4)^{r+1}$$

$$(-)^{m+r+1} \frac{1}{r+1} \left(1 - \frac{1}{5^{r+1}} + \frac{1}{9^{r+1}} - \dots (-)^{m-1} \frac{1}{(4m-3)^{r+1}} \right),$$

$$\int_0^1 \frac{x^{4m+1} (\lg x)^r}{1+x^4} dx = (-)^{m+r} \frac{1}{r+1} S'(2, 4)^{r+1}$$

$$(-)^{m+r+1} \frac{1}{r+1} \left(\frac{1}{2^{r+1}} - \frac{1}{6^{r+1}} + \dots (-)^{m-1} \frac{1}{(4m-2)^{r+1}} \right),$$

$$\int_0^1 \frac{x^{4m+2} (\lg x)^r}{1+x^4} dx = (-)^{m+r} \frac{1}{r+1} S'(3, 4)^{r+1}$$

$$(-)^{m+r+1} \frac{1}{r+1} \left(\frac{1}{3^{r+1}} - \frac{1}{7^{r+1}} + \dots (-)^{m-1} \frac{1}{(4m-1)^{r+1}} \right),$$

$$\int_0^1 \frac{x^{4m+3} (\lg x)^r}{1+x^4} dx = (-)^{m+r} \frac{1}{r+1} S'(1, 1)^{r+1}$$

$$(-)^{m+r+1} \frac{1}{r+1} \left(1 - \frac{1}{2^{r+1}} + \frac{1}{3^{r+1}} - \dots (-)^{m-1} \frac{1}{m^{r+1}} \right).$$

In Nr. 12) ist nicht zwischen einem geraden und ungeraden unterschieden. Geschieht diess, so entstehen acht Integralformen.

Auf dieselbe Weise kann man mit der gleichen Leichtigkeit die Integrale $\int_0^1 \frac{x^{5m+p} (\lg x)^r}{1+x^5} dx$, $\int_0^1 \frac{x^{6m+p} (\lg x)^r}{1+x^6} dx$, u. s. w.

bestimmen. Das allgemeine Fortgangsgesetz erkennt man leicht aus den angegebenen Darstellungen. Diese Integrale führen auf die reciproken Potenzreihen mit gleichen und abwechselnden Zeichen, welche einer und derselben Zunahme zugehören. Da, wie früher gezeigt wurde, wie die Summen dieser Reihen mit beliebiger Schärfe gefunden werden können, so ist auch das Gesetz, wornach alle hierher gehörigen Integrale bestimmt werden können, gegeben, und das vorliegende Problem ganz allgemein gelöst.

Wir wenden uns nun zur Darstellung einer andern Art hierher gehöriger Integrale.

§. 42.

Verbindet man die Gleichung Nr. 1) §. 16. mit $\int_0^1 x^{2m+p} (\lg x)^r dx$, erhält man:

1)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^{3m+p} (\lg x)^r}{1+x+x^2} dx &= \int_0^1 (\lg x)^r (x^{3m+p-3} + x^{3m+p-6} \dots x^{p+1}) dx \\
&+ \int_0^1 \frac{x^p (\lg x)^r}{1+x+x^2} dx - \int_0^1 (\lg x)^r (x^{3m+p-3} + x^{3m+p-6} \dots x^p) dx \\
&= (-)^r 1^{r+1} \left(\frac{1}{(p+2)^{r+1}} + \frac{1}{(p+5)^{r+1}} + \dots \frac{1}{(3m+p-1)^{r+1}} \right) \\
&+ \int_0^1 \frac{x^p (\lg x)^r}{1+x+x^2} dx (-)^{r+1} 1^{r+1} \left(\frac{1}{(p+1)^{r+1}} + \frac{1}{(p+4)^{r+1}} + \dots \frac{1}{(3m+p-2)^{r+1}} \right).
\end{aligned}$$

Wird $\frac{x^p}{1+x+x^2}$ in Reihen nach den steigenden Potenzen von x entwickelt und mit $\int_0^1 (\lg x)^r dx$ verbunden, so entsteht:

2)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^p (\lg x)^r}{1+x+x^2} dx &= \int_0^1 (\lg x)^r (x^p + x^{p+3} + x^{p+6} + \dots) dx \\
&- \int_0^1 (\lg x)^r (x^{p+1} + x^{p+4} + x^{p+7} \dots) dx \\
&= (-)^r 1^{r+1} \left(\frac{1}{(p+1)^{r+1}} + \frac{1}{(p+4)^{r+1}} + \frac{1}{(p+7)^{r+1}} + \dots \right) \\
&(-)^{r+1} 1^{r+1} \left(\frac{1}{(p+2)^{r+1}} + \frac{1}{(p+5)^{r+1}} + \frac{1}{(p+8)^{r+1}} + \dots \right) \\
&= (-)^r 1^{r+1} S(p+1, 3)^{r+1} (-)^{r+1} 1^{r+1} S(p+2, 3)^{r+1}.
\end{aligned}$$

Setzt man nun für p die Werthe 0, 1, 2 in Nr. 1) und 2) und verbindet die hieraus sich ergebenden Resultate in schicklicher Ordnung, so erhält man folgende drei Integralformen:

3)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^{3m} (\lg x)^r dx}{1+x+x^2} &= (-)^r 1^{r+1} S(1, 3)^{r+1} (-)^{r+1} 1^{r+1} S(2, 3)^{r+1} \\
&(-)^{r+1} 1^{r+1} \left(1 + \frac{1}{4^{r+1}} + \frac{1}{7^{r+1}} \dots \frac{1}{(3m-2)^{r+1}} \right) \\
&(-)^r 1^{r+1} \left(\frac{1}{2^{r+1}} + \frac{1}{5^{r+1}} + \frac{1}{8^{r+1}} + \dots \frac{1}{(3m-1)^{r+1}} \right),
\end{aligned}$$

4)

$$\int_0^1 \frac{x^{3m+1} (\lg x)^r \partial x}{1+x+x^2} = (-)^r \cdot 1^{r+1} \cdot S(2, 3)^{r+1} (-)^{r+1} \frac{1^{r+1}}{3^{r+1}} S(1, 1)^{r+1} \\ (-)^{r+1} \cdot 1^{r+1} \left(\frac{1}{2^{r+1}} + \frac{1}{5^{r+1}} + \frac{1}{8^{r+1}} + \dots + \frac{1}{(3m-1)^{r+1}} \right) \\ (-)^r \frac{1^{r+1}}{3^{r+1}} \left(1 + \frac{1}{2^{r+1}} + \frac{1}{3^{r+1}} + \dots + \frac{1}{m^{r+1}} \right),$$

5)

$$\int_0^1 \frac{x^{3m+2} (\lg x)^r \partial x}{1+x+x^2} = (-)^r \cdot 1^{r+1} S(3, 3)^{r+1} (-)^{r+1} 1^{r+1} S(4, 3)^{r+1} \\ (-)^{r+1} \cdot 1^{r+1} \left(\frac{1}{3^{r+1}} + \frac{1}{6^{r+1}} + \frac{1}{9^{r+1}} + \dots + \frac{1}{(3m)^{r+1}} \right) \\ (-)^r \cdot 1^{r+1} \left(\frac{1}{4^{r+1}} + \frac{1}{7^{r+1}} + \frac{1}{10^{r+1}} + \dots + \frac{1}{(3m+1)^{r+1}} \right).$$

In der Darstellung Nr. 5) beginnt die Reihe $S(4, 3)^{r+1}$ nicht mit dem ersten Gliede (.1), eben so nicht das vierte Glied. Zählt man daher $(-)^{r+1} 1^{r+1} \cdot (-)^r \cdot 1^{r+1} \cdot 1 = 0$ in beiden zu und ab, wodurch sie ergänzt werden, so geht Nr. 5) über in:

6)

$$\int_0^1 \frac{x^{3m+2} (\lg x)^r \partial x}{1+x+x^2} = (-)^r \frac{1^{r+1}}{3^{r+1}} S(1, 1)^{r+1} (-)^{r+1} \cdot 1^{r+1} S(1, 3)^{r+1} \\ (-)^{r+1} \frac{1^{r+1}}{3^{r+1}} \left(1 + \frac{1}{2^{r+1}} + \frac{1}{3^{r+1}} + \dots + \frac{1}{m^{r+1}} \right) \\ (-)^r \cdot 1^{r+1} \left(1 + \frac{1}{4^{r+1}} + \frac{1}{7^{r+1}} + \dots + \frac{1}{(3m+1)^{r+1}} \right).$$

Hieraus ergeben sich folgende Integrale, wenn $r=1$ und $m=0, 1, 2, \dots$ gesetzt wird:

7)

$$\int_0^1 \frac{\lg x}{1+x+x^2} \partial x = -S(1, 3)^2 + S(2, 3)^2, \\ \int_0^1 \frac{x \lg x}{1+x+x^2} \partial x = -S(2, 3) + \frac{1}{9} S(1, 1)^2 = -S(2, 3)^2 + \frac{\pi^2}{54}, \\ \int_0^1 \frac{x^2 \lg x}{1+x+x^2} \partial x = -\frac{\pi^2}{54} + S(1, 3)^2 - 1,$$

$$\int_0^1 \frac{x^3 \lg x}{1+x+x^2} dx = -S(1,3)^2 + S(2,3)^2 + \frac{3}{4},$$

$$\int_0^1 \frac{x^4 \lg x}{1+x+x^2} dx = -S(2,3)^2 + \frac{\pi^2}{54} + \frac{5}{36},$$

$$\int_0^1 \frac{x^5 \lg x}{1+x+x^2} dx = -\frac{\pi^2}{54} + S(1,3)^2 - \frac{137}{144},$$

$$\int_0^1 \frac{x^6 \lg x}{1+x+x^2} dx = -S(1,3)^2 + S(2,3)^2 + \frac{309}{400},$$

$$\int_0^1 \frac{x^7 \lg x}{1+x+x^2} dx = -S(2,3)^2 + \frac{\pi^2}{54} + \frac{1334}{9600},$$

$$\int_0^1 \frac{x^8 \lg x}{1+x+x^2} dx = -\frac{\pi^2}{54} + S(1,3)^2 - \frac{2155}{2352},$$

u. s. w.

Wird $r=2$, $m=0, 1, 2, \dots$ gesetzt, so erhält man folgende Integrale:

8)

$$\int_0^1 \frac{(\lg x)^2 dx}{1+x+x^2} = 2S(1,3)^2 - 2S(2,3)^2 = \frac{8\pi^3}{81\sqrt{3}},$$

$$\int_0^1 \frac{x(\lg x)^2 dx}{1+x+x^2} = 2S(2,3)^2 - \frac{2}{27} S(1,1)^2,$$

$$\int_0^1 \frac{x^2(\lg x)^2 dx}{1+x+x^2} = \frac{2}{27} S(1,1)^2 - 2S(1,3)^2 + 2,$$

$$\int_0^1 \frac{x^3(\lg x)^2 dx}{1+x+x^2} = \frac{8\pi^3}{81\sqrt{3}} - \frac{7}{4},$$

$$\int_0^1 \frac{x^4(\lg x)^2 dx}{1+x+x^2} = 2S(2,3)^2 - \frac{2}{27} S(1,1)^2 - \frac{19}{108},$$

$$\int_0^1 \frac{x^5(\lg x)^2 dx}{1+x+x^2} = \frac{2}{27} S(1,1)^2 - 2S(1,3)^2 + \frac{1691}{864},$$

$$\int_0^1 \frac{x^6(\lg x)^2 dx}{1+x+x^2} = \frac{8\pi^3}{81\sqrt{3}} - \frac{7061}{4000},$$

u. s. w.

Die Werthe für $S(2,3)^2$, $S(2,3)^2 \dots$ sind in §. 27. angegeben.

Euler hat (Integr.-Rechn. Bd. IV. p. 141.) folgendes hieher gehörige Integral:

$$\int_0^1 \frac{(1+2x)\lg x}{1+x+x^2} dx = -\frac{\pi^2}{9}$$

angegeben. Es findet sich auf folgende Weise. Nimmt man das zweite Integral in Nr. 7) doppelt und zählt es zu dem ersten, so erhält man:

9)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{(1+2x)\lg x}{1+x+x^2} dx &= -S(1,3)^2 - S(2,3)^2 + \frac{2\pi^2}{54} \\ &= -S(1,3)^2 - S(2,3)^2 - \frac{\pi^2}{9 \cdot 6} + \frac{3\pi^2}{54} \\ &= -S(1,3)^2 - S(2,3)^2 - S(3,3)^2 + \frac{\pi^2}{18} \\ &= -S(1,1)^2 + \frac{\pi^2}{18} = -\frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{18} = -\frac{\pi^2}{9}, \end{aligned}$$

wenn man Nr. 3) §. 24. berücksichtigt. Man ist überrascht, mit welchem Scharfsinne Euler bei den ihm zu Gebote stehenden Mitteln in diese Integrale eindrang. Auf dieselbe Weise erhält man aus dem 4ten und 5ten Integrale in Nr. 7):

10)

$$\int_0^1 \frac{x^3(1+2x)\lg x}{1+x+x^2} dx = -\frac{\pi^2}{9} + \frac{37}{36},$$

u. s. w.

§. 43.

Wird in der Gleichung Nr. 1) §. 17. zwischen einem geraden und ungeraden m unterschieden, also $2m$ statt m und $2m+1$ statt m geschrieben, und werden die hierdurch entstehenden Resultate mit

$$\int_0^1 x^{6m+p}(\lg x)^r dx \quad \text{und} \quad \int_0^1 x^{6m+p+1}(\lg x)^r dx$$

verbunden und integrirt, so erhält man:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^{6m+p}(\lg x)^r}{1-x+x^2} dx &= \int_0^1 (\lg x)^r (x^{6m+p-2} - x^{6m+p-5} \dots - x^{p+1}) dx \\ &+ \int_0^1 \frac{x^p(\lg x)^r}{1-x+x^2} dx + \int_0^1 (\lg x)^r (x^{6m+p-3} - x^{6m+p-6} \dots - x^p) dx \end{aligned}$$

$$=(-)^{r+1} \cdot 1^{r+1} \left(\frac{1}{(p+2)^{r+1}} - \frac{1}{(p+5)^{r+1}} + \frac{1}{(p+8)^{r+1}} - \dots - \frac{1}{(6m+p-1)^{r+1}} \right) \\ + \int_0^1 \frac{x^p (\lg x)^r}{1-x+x^2} dx$$

$$(-)^{r+1} \cdot 1^{r+1} \left(\frac{1}{(p+1)^{r+1}} - \frac{1}{(p+4)^{r+1}} + \frac{1}{(p+7)^{r+1}} - \dots - \frac{1}{(6m+p-2)^{r+1}} \right),$$

2)

$$\int_0^1 \frac{x^{6m+p+2} (\lg x)^r}{1-x+x^2} dx = \int_0^1 (\lg x)^r (x^{6m+p+1} - x^{6m+p-2} + \dots x^{p+1}) dx$$

$$- \int_0^1 \frac{x^p (\lg x)^r}{1-x+x^2} dx + \int_0^1 (\lg x)^r (x^{6m+p} - x^{6m+p-3} - \dots x^p) dx$$

$$=(-)^r \cdot 1^{r+1} \left(\frac{1}{(p+2)^{r+1}} - \frac{1}{(p+5)^{r+1}} + \frac{1}{(p+8)^{r+1}} - \dots + \frac{1}{(6m+p+2)^{r+1}} \right) \\ - \int_0^1 \frac{x^p (\lg x)^r}{1-x+x^2} dx$$

$$(-)^r \cdot 1^{r+1} \left(\frac{1}{(p+1)^{r+1}} - \frac{1}{(p+4)^{r+1}} + \frac{1}{(p+7)^{r+1}} - \dots + \frac{1}{(6m+p+1)^{r+1}} \right).$$

Wird auch $\frac{x^p}{1-x+x^2}$ in eine Doppelreihe nach den steigenden Potenzen von x entwickelt, mit $\int_0^1 (\lg x)^r dx$ verbunden und integriert, so entsteht:

3)

$$\int_0^1 \frac{x^p (\lg x)^r}{1-x+x^2} dx = \int_0^1 (\lg x)^r (x^p - x^{p+3} + x^{p+6} - x^{p+9} \dots) dx$$

$$+ \int_0^1 (\lg x)^r (x^{p+1} - x^{p+4} + x^{p+7} - \dots)$$

$$=(-)^r \cdot 1^{r+1} \left(\frac{1}{(p+1)^{r+1}} - \frac{1}{(p+4)^{r+1}} + \frac{1}{(p+7)^{r+1}} - \dots \right)$$

$$(-)^r \cdot 1^{r+1} \left(\frac{1}{(p+2)^{r+1}} - \frac{1}{(p+5)^{r+1}} + \frac{1}{(p+8)^{r+1}} - \dots \right)$$

$$=(-)^r \cdot 1^{r+1} S'(p+1, 3)^{r+1} (-)^r \cdot 1^{r+1} S'(p+2, 3)^{r+1}.$$

$$-(x^{-6} + x^{-12} + x^{-18} \dots x^{-6m})$$

zu Grunde und verbindet sie mit $\int_0^1 x^{6m+p} (\lg x)^r dx$, so erhält man:

1)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^{6m+p} (\lg x)^r}{1+x^2+x^4} dx &= \int_0^1 (\lg x)^r (x^{6m+p-4} + x^{6m+p-10} \dots x^{p+2}) dx \\ &+ \int_0^1 \frac{x^p (\lg x)^r}{1+x^2+x^4} dx - \int_0^1 (\lg x)^r (x^{6m+p-6} + x^{6m+p-12} \dots x^p) dx \\ &= (-)^r \cdot 1^{r+1} \left(\frac{1}{(p+3)^{r+1}} + \frac{1}{(p+9)^{r+1}} + \dots + \frac{1}{(6m+p-3)^{r+1}} \right) \\ &\quad + \int_0^1 \frac{x^p (\lg x)^r}{1+x^2+x^4} dx \\ &= (-)^{r+1} \cdot 1^{r+1} \left(\frac{1}{(p+1)^{r+1}} + \frac{1}{(p+7)^{r+1}} + \dots + \frac{1}{(6m+p-5)^{r+1}} \right). \end{aligned}$$

Entwickelt man $\frac{1}{1+x^2+x^4}$ in eine Reihe nach den steigen-

1 Potenzen von x und verbindet das hiedurch entstehende Resultat mit $\int_0^1 x^p (\lg x)^r dx$, so erhält man:

2)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^p (\lg x)^r}{1+x^2+x^4} dx &= \int_0^1 (\lg x)^r (x^p + x^{p+6} + x^{p+12} + \dots) dx \\ &\quad - \int_0^1 (\lg x)^r (x^{p+2} + x^{p+8} + x^{p+14} + \dots) dx \\ &= (-)^r \cdot 1^{r+1} \left(\frac{1}{(p+1)^{r+1}} + \frac{1}{(p+7)^{r+1}} + \frac{1}{(p+13)^{r+1}} \dots \right) \\ &\quad (-)^{r+1} \cdot 1^{r+1} \left(\frac{1}{(p+3)^{r+1}} + \frac{1}{(p+9)^{r+1}} + \frac{1}{(p+15)^{r+1}} \dots \right) \\ &= (-)^r \cdot 1^{r+1} S(p+1, 6)^{r+1} (-)^{r+1} \cdot 1^{r+1} S(p+3, 6)^{r+1}. \end{aligned}$$

Setzt man nun $p=0, 1, 2, 3, 4, 5$ in Nr. 1) und 2) und verbindet die hiedurch entstehenden Resultate mit einander, so ergeben sich folgende sechs Integralformen:

3)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^{6m} (\lg x)^r}{1+x^2+x^4} dx &= (-)^r \cdot 1^{r+1} S(1, 6)^{r+1} (-)^{r+1} \frac{1^{r+1}}{3^{r+1}} S(1, 2)^{r+1} \\ &\quad (-)^{r+1} \cdot 1^{r+1} \left(1 + \frac{1}{7^{r+1}} + \frac{1}{13^{r+1}} + \dots + \frac{1}{(6m-5)^{r+1}} \right) \\ &\quad (-)^r \cdot \frac{1^{r+1}}{3^{r+1}} \left(1 + \frac{1}{3^{r+1}} + \frac{1}{5^{r+1}} + \dots + \frac{1}{(2m-1)^{r+1}} \right), \end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^{6m+1} (\lg x)^r}{1+x^2+x^4} dx &= (-)^r \cdot 1^{r+1} S(2, 6)^{r+1} (-)^{r+1} 1^{r+1} S(4, 6)^{r+1} \\ &\quad (-)^{r+1} \cdot 1^{r+1} \left(\frac{1}{2^{r+1}} + \frac{1}{8^{r+1}} + \dots + \frac{1}{(6m-4)^{r+1}} \right) \\ &\quad (-)^r \cdot 1^{r+1} \left(\frac{1}{4^{r+1}} + \frac{1}{10^{r+1}} + \dots + \frac{1}{(6m-2)^{r+1}} \right), \end{aligned}$$

5)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^{6m+2} (\lg x)^r}{1+x^2+x^4} dx &= (-)^r \cdot \frac{1^{r+1}}{3^{r+1}} S(1, 2)^{r+1} (-)^{r+1} 1^{r+1} S(5, 6)^{r+1} \\ &\quad (-)^{r+1} \cdot \frac{1^{r+1}}{3^{r+1}} \left(1 + \frac{1}{3^{r+1}} + \frac{1}{5^{r+1}} + \dots + \frac{1}{(2m-1)^{r+1}} \right) \\ &\quad (-)^r \cdot 1^{r+1} \left(\frac{1}{5^{r+1}} + \frac{1}{11^{r+1}} + \dots + \frac{1}{(6m-1)^{r+1}} \right), \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \frac{x^2 \lg x}{1+x^2+x^4} dx = -S(2,6)^2 + S(4,6)^2,$$

$$\int_0^1 \frac{x^2 \lg x}{1+x^2+x^4} dx = -\frac{\pi^2}{72} + S(5,6)^2,$$

$$\int_0^1 \frac{x^2 \lg x}{1+x^2+x^4} dx = -S(4,6)^2 + \frac{1}{36} S(1,1)^2 = -S(4,6)^2 + \frac{\pi^2}{216},$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \\
& = \int_0^1 (\lg x)^p (x^{p+1} + x^{p+2} + x^{p+3} + \dots) dx \\
& = (-)^p \cdot 1^{p+1} S(p+1, 4)^{p+1} (-)^{p+1} \cdot 1^{p+1} S(p+2, 4)^{p+1}.
\end{aligned}$$

Wird nun $p=0, 1, 2, 3$ gesetzt und werden die nöthigen Entwicklungen gemacht, so erhält man zur Bestimmung des vorliegenden Integrals folgende vier Formen:

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY

ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATION
R 2

Fig. 1.

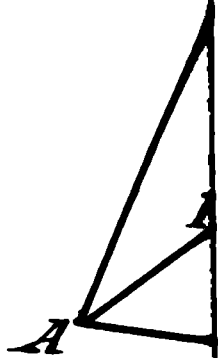


Fig. 4.

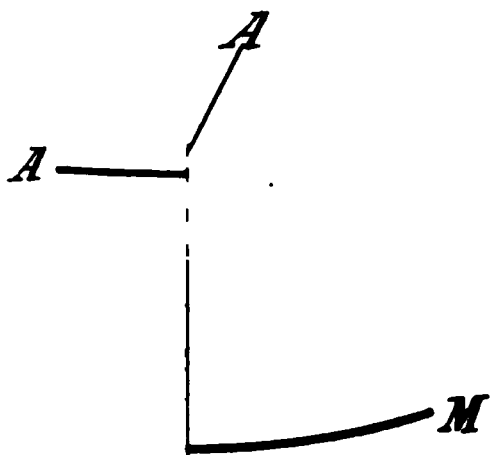
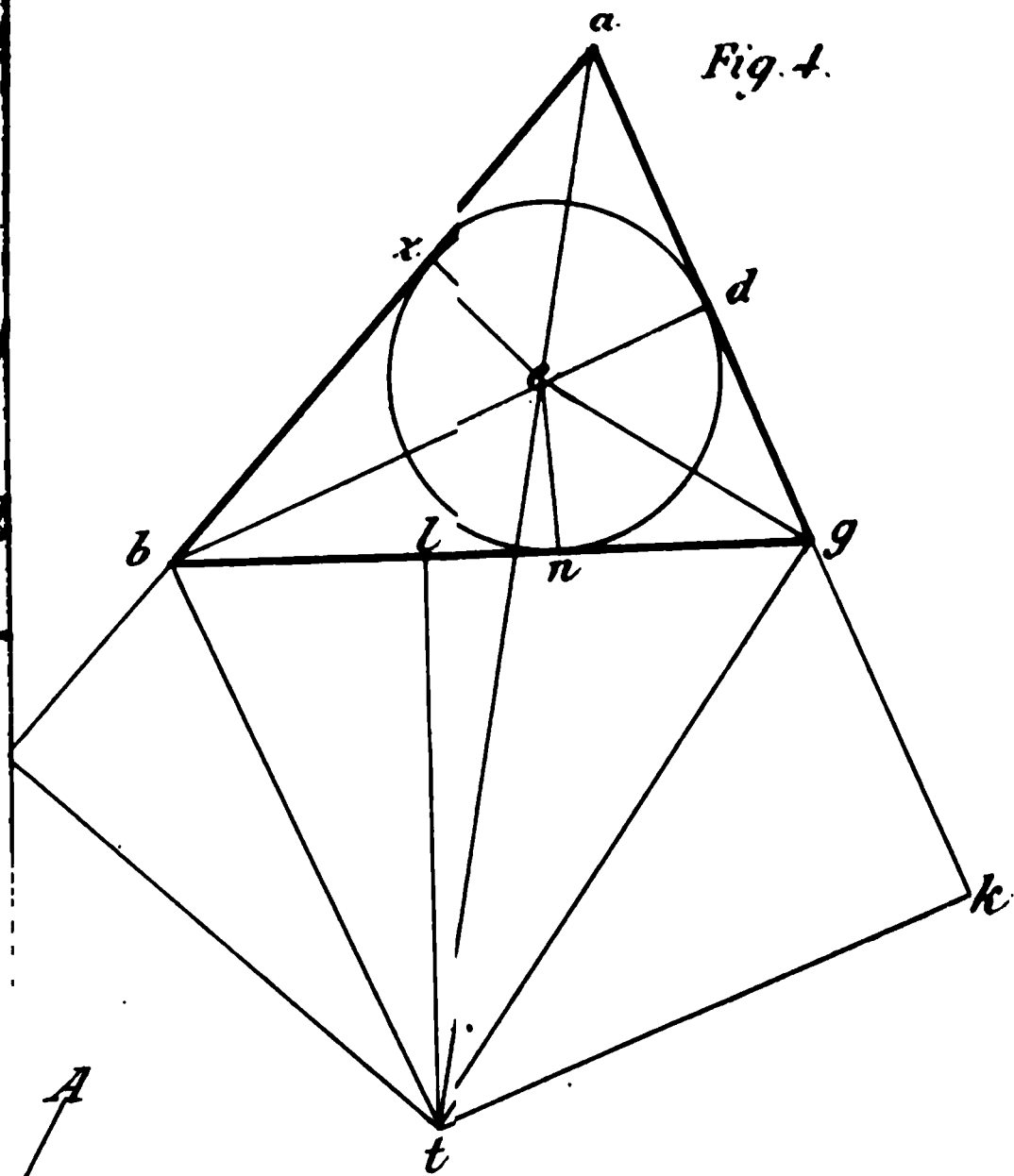
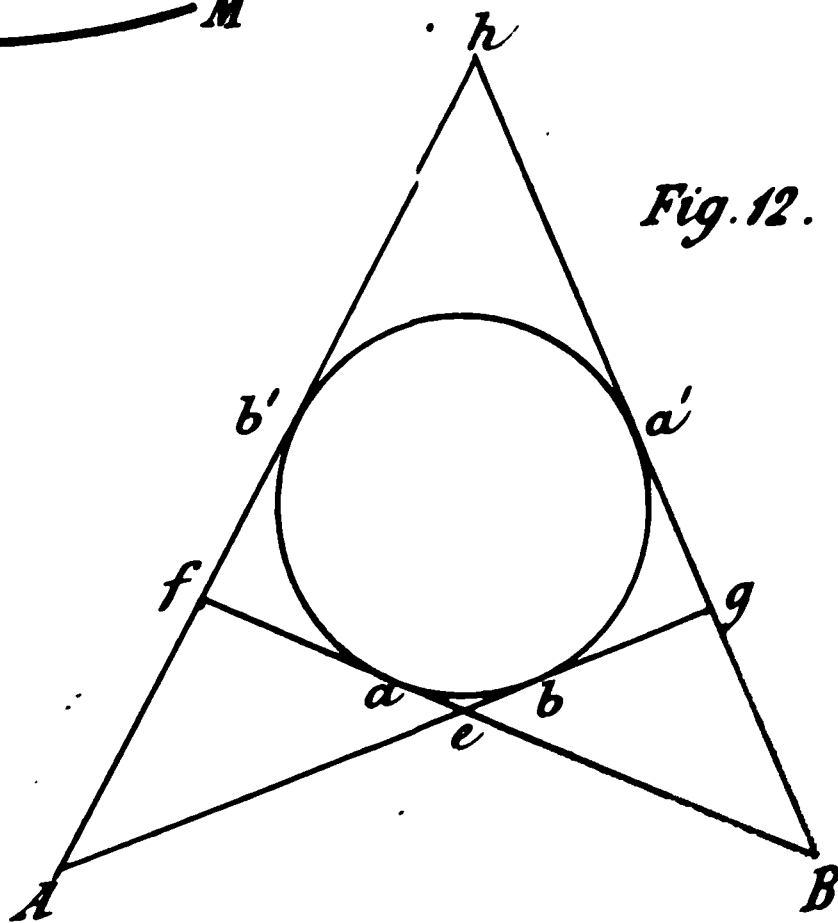
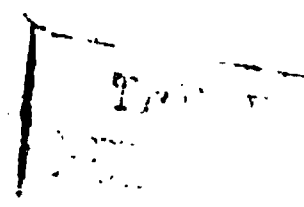


Fig. 9.



Fig. 12.





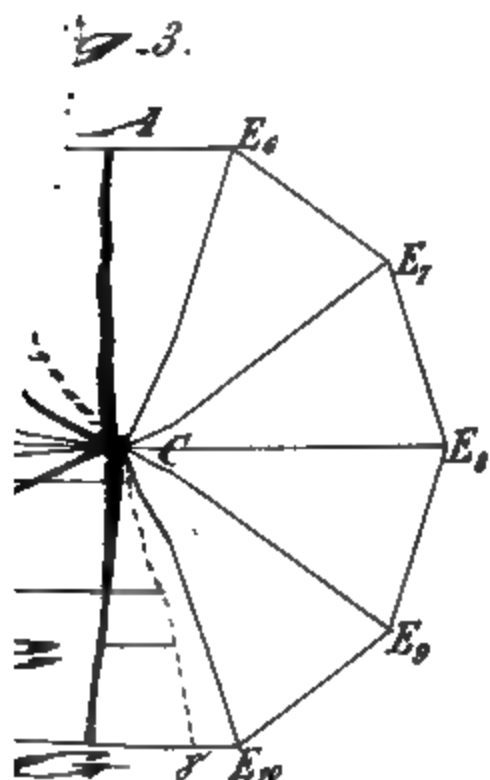


Fig. 9.

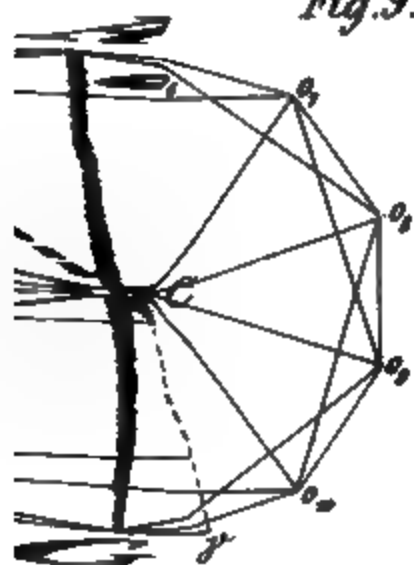


Fig. 8.

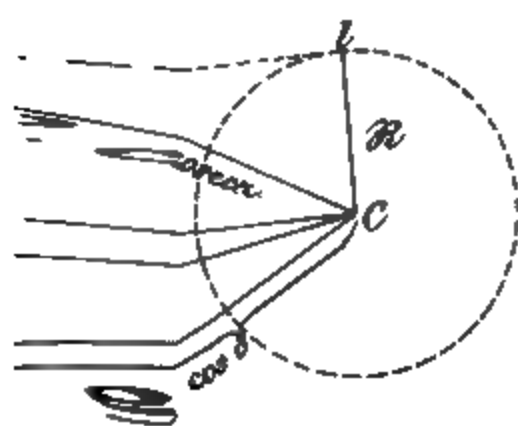


Fig. 10.

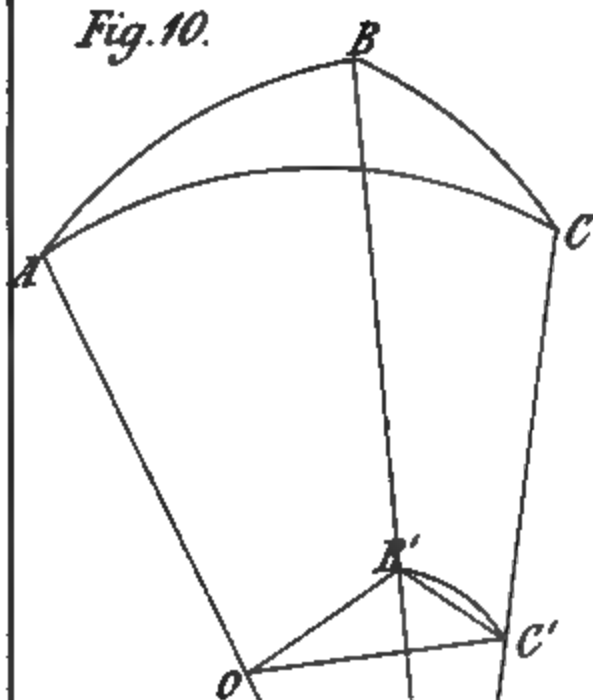
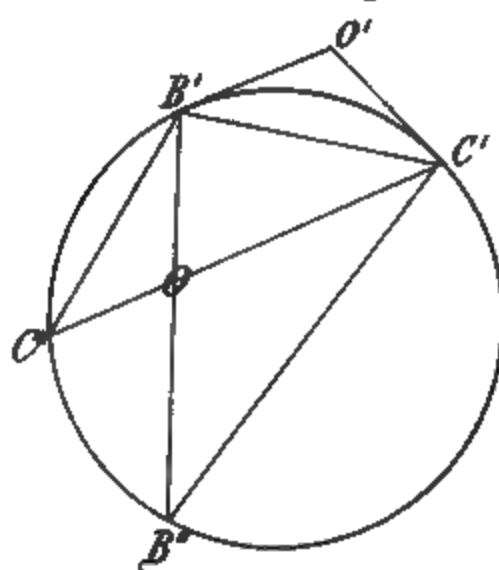


Fig. 12.

Fig. 11.



THE NEW
PUBLIC
ASTORIA
THE
1



Fig. 10.



Fig. 11.





AUG 23 1938

